Die Anwendung der Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklungen auf laminare, zweidimensionale Strömungen mit endlichen Ablösegebieten

DISSERTATION
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigt von der Fakultät für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von
Dipl.-Ing. Heinz Herwig

Bochum 1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544708_0033

Die Anwendung der Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklungen auf laminare, zweidimensionale Strömungen mit endlichen Ablösegebieten

DISSERTATION
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigt von der Fakultät für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von
Dipl.-Ing. Heinz Herwig

Bochum 1981

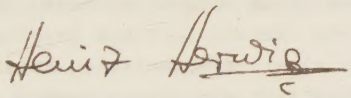
UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof. Dr.-Ing. K.Gersten
Korreferent: Priv.-Doz. Dr.-Ing. Vasanta Ram
Tag der mündlichen Prüfung: 2.12.1981

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1976 bis 1980 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Thermo- und Fluiddynamik der Ruhr-Universität Bochum.

Ich möchte an dieser Stelle allen danken, die zum Zustandekommen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Gersten und Herrn Priv.-Doz. Dr.-Ing. Vasanta Ram für die Betreuung der Arbeit bzw. die Übernahme des Korreferates. Das engagierte Interesse beider war besonders in der Entstehungsphase der Arbeit von großem Gewicht.

Dank sagen möchte ich auch Prof. K. Stewartson/London und Prof. F.T. Smith/London für die vielen intensiven Diskussionen. In den ausführlichen Gesprächen mit Prof. F.T. Smith habe ich kollegiale Unterstützung und wissenschaftliche Bereicherung erfahren.



Die Anwendung der Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklungen auf laminare, zweidimensionale Strömungen mit endlichen Ablösegebieten

Übersicht

Es werden die Anwendungsmöglichkeiten der Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklungen ('matched asymptotic expansions') auf Strömungen mit Ablösung untersucht (laminar, inkompressibel, stationär ,zweidimensional).
Als wichtiger Aspekt erweist sich dabei die Frage, wie die Schwierigkeiten, die mit der sog. Goldstein-Singularität verbunden sind, überwunden werden können. Im Rahmen der asymptotischen Theorie gibt es hierfür zwei verschiedene Wege, die als Grenzfälle eines Parameters $\varkappa$ interpretiert werden können. $\varkappa$ stellt das Verhältnis aus der Dicke der ankommenden Grenzschicht zu einer typischen Querabmessung des Ablösegebietes dar.
Beide Grenzfälle werden eingehend behandelt und zu Vergleichszwecken auf eine einheitliche Modellgeometrie angewandt.
In diesem Zusammenhang wird untersucht, ob das sog. Batchelor-Modell (konstante Drehung in einem geschlossenen Innengebiet) als erster Term einer asymptotischen Entwicklung verwendet werden kann. Es stellt sich dabei heraus, daß notwendige Bedingungen für eine solche Verwendung verletzt werden. Nur die 'Entartung' dieser Strömung zum Fall der sog. Totwasser-Strömung (keine Strömungsgeschwindigkeiten im Innengebiet) kann als Grundlösung einer asymptotischen Entwicklung verwendet werden.
Besonderer Wert wird auf eine präzise Begriffsbestimmung gelegt, was zur deutlicheren Einordnung bzw. Abgrenzung verschiedener Strömungstypen führt.

Gliederung

Seite

1. Einleitung 1

2. Grundlagen

2.1. Die Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklungen und ihre Anwendung auf abgelöste Strömungen 4

2.2. Wichtige Schritte auf dem Weg zu einer rationalen Theorie laminarer abgelöster Strömungen 9

2.3. Problemformulierung 13

2.3.1. Voraussetzungen 13
2.3.2. Geometrie 13
2.3.3. Grundgleichungen 14
2.3.4. Parameter des Problems 15
2.3.5. Präzisierung des Begriffes 'Ablösung' 18

3. Grenzschichten in Wechselwirkung mit der Außenströmung

3.1. Die Triple-Deck-Gleichungen 20

3.2. Lösung der Triple-Deck-Gleichungen 27

3.2.1. Iterationsschema 27
3.2.2. Inverses Grenzschichtverfahren 28
3.2.3. Linearisierte Außenströmung; das Hilbert-Integral 39

3.3. Wechselwirkung ohne Triple-Deck 42

3.4. Numerische Aspekte 46

3.4.1. Inverses Grenzschichtverfahren 46
3.4.2. Hilbert-Integral 52

Seite

4. Grenzschichten mit Rückströmung

4.1. Asymptotische Wechselwirkungstheorie (Triple-Deck-Theorie) 57

4.1.1. Anwendung der Triple-Deck-Theorie auf die Dellenströmung 57

4.1.2. Ergebnisse 66

4.2. Linearisierte Triple-Deck-Theorie 72

4.3. Theorie für endliche Reynolds-Zahlen (WWG-Theorie) 79

4.3.1. Anwendung der WWG-Theorie auf die Dellenströmung 79

4.3.2. Ergebnisse 81

4.3.3. WWG-Theorie für Strömungen ohne Rückströmgebiete 84

4.4. Ergebnisse in physikalischen Variablen 89

4.4.1. Druckmaximum 89

4.4.2. Grenzkurven beginnender Rückströmung 92

4.4.3. Widerstand der Delle 94

5. Grenzschichten mit Ablösung

5.1. Eine rationale Theorie abgelöster Strömungen 100

5.1.1. Mögliche Druckverteilungen um den Abströmpunkt x_0 100

5.1.2. Ein asymptotisches Konzept laminarer Ablösung (Sychev-Theorie) 103

5.2. Modellvorstellungen für $Re^{-1} = 0$ und ihre Eignung als relevante Euler-Lösung 108

5.2.1. Modell der freien Stromlinien (Kirchhoff) 108

5.2.2. Sychev/Smith-Theorie 111

5.2.3. Batchelor-Modell 112

Seite

5.3. Anwendung des Batchelor-Modells auf die Dellengeometrie 114

5.3.1. Mathematische Formulierung 115
5.3.2. Numerisches Lösungsverfahren 121
5.3.3. Ergebnisse 125

5.4. Anwendung des Batchelor-Modells auf andere Geometrien 134

5.4.1. Weiche Stufe 136
5.4.2. Kreiszylinder 140

5.5. Modifizierte Dellengeometrie 142

5.5.1. Variation des Abströmpunktes S_0 144
5.5.2. Variation der Drehungsstärke ω_0 147
5.5.3. Variation der 'pre hump'-Höhe a_1 149

5.6. Der Einfluß endlicher Re-Zahlen auf die Dellenströmung mit $\omega_0 \equiv 0$ 154

6. Diskussion

6.1. Ergebnisse 178

6.2. Strömungsablösung und asymptotische Theorie 180

6.3. Schlußbemerkung 190

7. Literaturverzeichnis 192

8. Anhang; Numerische Ergebnisse 198

Bezeichnungen

- die zahlreichen verschiedenen unabhängigen und abhängigen Variablen sind im Text jeweils an der Stelle in Form von Tabellen eingeführt, an der sie zum ersten Mal verwendet werden.

- alle dimensionsbehafteten Größen sind mit dem Symbol '*' versehen. Größen ohne '*' sind in der Regel dimensionslos.

- die wichtigsten Größen sind:

x, X, s, t, r	Koordinate in Strömungsrichtung
y, Y, n, η, H	Koordinate quer zur Strömungsrichtung
a_1^*	'pre hump'-Dicke
b^*	Breite, senkrecht zur Zeichenebene
h	Sprung im Gesamtdruck
H^*	Dellentiefe
H_T	Dellentiefe, s. Gl. (4.2)
H_W	Dellentiefe, s. Gl. (4.35)
l^*	Dellenlänge
l_T	Dellenlänge, s. Gl. (4.3)
l_W	Dellenlänge, s. Gl. (4.36)
L^*	Vorderkantenabstand
p^*, P	statischer Druck
Q^*	Volumenstrom
r^*, R^*, a^*	örtlicher Krümmungsradius
u^*	Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung
u_o	Blasius-Geschwindigkeitsprofil

U_∞	Anströmgeschwindigkeit
v^*	Geschwindigkeitskomponente quer zur Strömungsrichtung
w^*	Strömungsgeschwindigkeit
W^*	Widerstand
x_a, S_a	Ablösepunkt
x_o, S_o	Abströmpunkt

γ	Wirbelstärke
δ	Grenzschichtdicke
δ_1	Verdrängungsdicke
Δ	Verdrängungsdicke, s. Kap. 3.3
ϵ	Störparameter; $\epsilon = Re^{-1/8}$
λ	Affinitätsfaktor; $\lambda = 0.332$ für ein Blasiusprofil
θ	Hilfsfunktion bei Rückströmgebieten, s. Gl. (3.40)
θ_o	Abströmwinkel
ν	kinematische Viskosität
ρ	Dichte
σ	Normalspannung
τ_w	Wandschubspannung
Ψ	Stromfunktion
ω	Relaxationsfaktor
ω_o	Drehung

Re	Reynolds-Zahl; $Re = U_\infty L^* / \nu$
c_f	Schubspannungsbeiwert; $c_f = \tau_w / (\rho U_\infty^2)$
$\varkappa$	Strömungsparameter; $\varkappa = \delta^* / H^*$
$\varkappa_1$	Triple-Deck-Systemparameter, s. Gl. (4.8)
$\varkappa_2$	Triple-Deck-Systemparameter, s. Gl. (4.9)
$\varkappa_H$	relative Dellentiefe; $\varkappa_H = H^* / l^*$
$\varkappa_L$	Vorderkantenabstand; $\varkappa_L = L^* / l^*$

Indizes:

a	außen
Abl	Ablösung
Bl	Blasius
i	innen
K	Kontur
RS	Rückströmung
T	Trennstromlinie

1. Einleitung

Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen kann als Grundaufgabe der Strömungsmechanik angesehen werden. Da analytische Lösungen - von speziellen Sonderfällen abgesehen - nicht zur Verfügung stehen, gilt es, diese Lösungen möglichst gut zu approximieren, was bis heute im wesentlichen auf zwei Wegen versucht wird:

- durch numerische Approximation der ursprünglichen Gleichungen
- durch asymptotische Entwicklungen der Navier-Stokes-Gleichungen.

Beide Wege werden gelegentlich als konkurrierend angesehen mit dem Anspruch, die jeweils andere Vorgehensweise überflüssig zu machen. Tatsächlich handelt es sich aber um Ansätze so unterschiedlicher Art, daß die Ergebnisse in ihrem spezifischen Charakter sehr unterschiedlich sind und als eine Ergänzung der jeweils anderen Methode genutzt werden können. So können z. B. 'scaling laws', gewonnen aus einer asymptotischen Betrachtung eines Problems, für eine sinnvolle Aufpunktverteilung einer numerischen Lösung genutzt werden. Im "Gegenzug" bleibt die asymptotische Theorie stets auf numerische Lösungsverfahren angewiesen, wenn auch in der Regel für vereinfachte Gleichungssysteme.

Hinzu kommt, daß beide Methoden einen grundsätzlich verschiedenen Näherungscharakter haben, so daß die jeweils andere Methode zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens genutzt werden kann. Während asymptotische Methoden, hier als Störungsrechnungen mit dem Störparameter Reynolds-Zahl (Re) verstanden, Näherungslösungen für $Re \to 0$ bzw. $Re^{-1} \to 0$ darstellen, sind numerische Methoden Approximationen in endlichen Schrittweiten, also Näherungslösungen für $h \to 0$ ($h \hat{=}$ Schrittweite des numerischen Verfahrens). Obwohl numerische Methoden per se nicht auf einen bestimmten Re-Bereich beschränkt sind, führt das starke Anwachsen des Rechenaufwandes mit der Re-Zahl dazu, daß numerische Lösungen bis heute auf niedrige Re-Zahlen begrenzt bleiben. Bild 1.1. soll dies verdeutlichen.

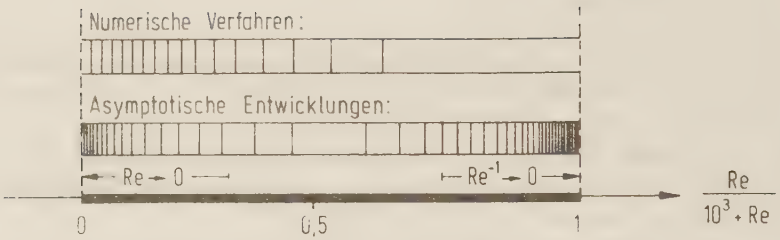


Bild 1: Näherungslösungen im Re-Zahl-Bereich $0 \leq Re \leq \infty$

In der Auftragung $\frac{Re}{C + Re}$, C = const., ist der gesamte Re-Zahlbereich auf das Intervall [0,1] abgebildet. Die Dichte der Schraffur soll eine qualitative Aussage über die Güte der Approximation machen.

In dieser Arbeit wird ausschließlich der asymptotische Grenzprozeß $Re^{-1} \to 0$ behandelt. Das Ziel dieser Arbeit ist dabei nicht primär der Versuch eine Näherungslösung für einen konkreten Fall (Umströmung einer vorgegebenen Geometrie bei einer bestimmten Re-Zahl) zu erhalten, sondern einen Beitrag zur Klärung folgender Fragen zu leisten:

- Ist es möglich, die asymptotische Theorie für $Re^{-1} \to 0$ (Grenzschichttheorie) auch auf abgelöste Strömungen anzuwenden?
- Welche Modifikationen der einfachen Grenzschichttheorie sind dazu notwendig ?
- Kann dies mit einem Aufwand geschehen, der dieses Vorgehen für die Ingenieur-Praxis interessant erscheinen läßt?

Die besondere Stärke der asymptotischen Theorie liegt in der Möglichkeit, die gewonnene mathematische Struktur physikalisch interpretieren zu können. So kann etwa die Tatsache, daß in

einzelnen Teilgebieten des Lösungsfeldes unterschiedliche Gleichungen als Approximation der Navier-Stokes-Gleichungen gelten, durch das Zusammenwirken bzw. die Dominanz unterschiedlicher Kräfte interpretiert werden.
Auf die physikalische Interpretation der mathematischen Problembeschreibung wird in dieser Arbeit besonderer Wert gelegt, was besonders auch zu dem Versuch einer klaren Begriffsbestimmung geführt hat. So wird z. B. der Begriff 'Ablösung' nicht 'wahllos', sondern nur im Zusammenhang mit bestimmten, klar definierten Vorgängen verwendet (s. Kapitel 2).
Neben einer genauen Begriffsbestimmung präzisiert Kap. 2 die Fragestellung und gibt einen Überblick über bisherige Arbeiten auf diesem Gebiet.
Für die Vorgänge bei Strömungsablösung ist der Begriff der 'Wechselwirkung' zwischen wandnaher (Grenzschicht-) und wandferner (Außen-) Strömung von fundamentaler Bedeutung. Kap. 3 erläutert diesen Begriff und gibt seine mathematische Formulierung an.
Es wird bezüglich der asymptotischen Beschreibung für sinnvoll angesehen, zwischen zwei Grenzfällen zu unterscheiden.

(A) Die betrachteten Ablösungsvorgänge spielen sich im Innern einer Wandgrenzschicht ab. Dieser Fall wird in Kapitel 4 behandelt und als 'Grenzschichten mit Rückströmung' bezeichnet.

(B) Die Grenzschicht verläßt als Ganzes die Wand und begrenzt als freie Scherschicht ein 'großes' Ablösegebiet, wobei 'groß' im asymptotischen Sinne verstanden wird (s. Kap. 2). Dieser Fall wird im Kapitel 5, 'Grenzschichten mit Ablösung', behandelt. Ein besonderes Schwergewicht wird dabei auf die Untersuchung des sog. 'Batchelor-Modells' als Grundlösung einer asymptotischen Betrachtung gelegt, da dieses Modell selbst auf dem Hintergrund einer asymptotischen Betrachtungsweise entstanden ist.

Kap. 6 gibt einen zusammenfassenden Überblick und kommt auf die eingangs gestellten Fragen zurück.

2. Grundlagen

2.1. Die Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklung und ihre Anwendung auf abgelöste Strömungen

Es soll hier zunächst in knapper Form die Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklungen vorgestellt werden. Anschließend werden die Voraussetzungen und Ziele des Versuches beschrieben, laminare, abgelöste Strömungen mit dieser Methode mathematisch zu erfassen.
Nach Darstellung einer Gleichung oder eines Gleichungssystems in dimensionsloser Form ist es sinnvoll, nach Grenzlösungen für die dann auftretenden dimensionslosen Parameter zu fragen. Gemeint sind Näherungslösungen für kleine oder große Werte dieser Parameter, die als rationale Näherungen systematisch verbessert werden können und oftmals das ursprüngliche System soweit vereinfachen, daß es einer mathematischen Behandlung überhaupt erst zugänglich wird.
Im Falle eines einzigen Parameters P kann mit diesem ein Störparameter ϵ so gebildet werden, daß gilt: $\epsilon \to 0$ für $P \to 0$ bzw. $P^{-1} \to 0$.
Die Grundidee ist, das ursprüngliche Gleichungssystem durch eine 'asymptotische Entwicklung in ϵ' zu ersetzen, deren erstes Glied als Grundlösung die Grenzlösung $\epsilon = 0$ enthält. Die Reihenentwicklung muß als asymptotische Entwicklung so beschaffen sein, daß der Fehler gegenüber der exakten Lösung für kleiner werdendes ϵ ebenfalls abnimmt.
Am Beispiel einer Funktion $y = y(x,\epsilon)$ als Lösung einer gewöhnlichen DGL mit dem dimensionslosen Parameter P (also gilt: $\epsilon = \epsilon(P)$, $\epsilon \to 0$ für z.B. $P^{-1} \to 0$) und bestimmten Randbedingungen heißt das:

$$f(x,\epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(\epsilon) \cdot f_i(x) \qquad (2.1)$$

ist eine asymptotische Entwicklung von $y(x,\epsilon)$, wenn

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{g_{i+1}}{g_i} = 0 \quad \text{für} \quad i \in \mathbb{N} \qquad (2.2)$$

f ist eine gleichmäßig gültige Näherung zur Ordnung g_n in einem Definitionsbereich D, wenn für $\epsilon \to 0$ der Ausdruck $[y(x,\epsilon) - f(x,\epsilon)] / g_n(\epsilon)$ für alle x aus D gleichmäßig gegen Null konvergiert.
Deckt sich D mit dem Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion $y(x,\epsilon)$, so handelt es sich um ein reguläres Störungsproblem.
Sehr viel häufiger treten sog. singuläre Störungsprobleme auf (so auch im hier behandelten Fall der abgelösten Strömung). Es existiert nicht eine im ganzen Definitionsbereich gültige Näherung f sondern mehrere Entwicklungen $f_k(x_k,\epsilon_k)$ mit (2.1) und (2.2) entsprechenden Bedingungen, jeweils gültig in Definitionsbereichen D_k. Charakteristisch für diese Entwicklungen ist, daß die Variablen x_k in der Regel erst durch eine Streckung

$$x_k = \frac{x}{\eta_k(\epsilon_k)} \qquad (2.3)$$

wieder Größen der Größenordnung 'Eins' werden. Zur Kennzeichnung von Größenordnungen sollen die üblichen Größenordnungssymbole 'O' und 'o' verwendet werden, die wie folgt definiert sind:

$$\eta_1(\epsilon) = O[\eta_2(\epsilon)] \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0 \;, \text{ wenn} \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\eta_1(\epsilon)}{\eta_2(\epsilon)} < \infty \qquad (2.4)$$

$$\eta_1(\epsilon) = o[\eta_2(\epsilon)] \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0 \;, \text{ wenn} \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\eta_1(\epsilon)}{\eta_2(\epsilon)} = 0 \qquad (2.5)$$

Entscheidend ist, daß sich benachbarte Definitionsbereiche D_κ überschneiden und in diesen Überlappungsbereichen aneinander angepaßt werden können (matching). In diesem 'Matching'-Prozeß können noch freie Konstanten in den Entwicklungen f_κ bestimmt werden.
Für Einzelheiten dieses 'Matching'-Prozesses und der Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklung überhaupt, sei auf die Lehrbücher von van Dyke [21], Cole [16], Kaplun [28] und Nayfeh [38] verwiesen.
Überträgt man die eben skizzierten Gedanken auf ein System aus partiellen DGL'n, so ergibt sich folgendes Bild: Das gesamte Lösungsfeld (zum Beispiel in zwei räumlichen Koordinaten als Definitionsbereich D) ist in einzelne Lösungsfelder D_κ aufgeteilt, für die jeweils verschiedene asymptotische Entwicklungen gelten (mit unterschiedlich gestreckten Variablen) und die aneinander angepaßt werden können.
Die mathematische Beschreibung der einzelnen Bereiche D_κ ist in der Regel physikalisch interpretierbar. Am Beispiel der einfachen Grenzschichtströmung heißt dies: Es entstehen die beiden Bereiche

- Außenströmung (mit x,y als unabhängige Variable)
- Grenzschichtströmung (mit $x, yRe^{1/2}$ als unabhängige Variable)

Physikalisch unterscheiden sich beide Bereiche fundamental: Die Außenströmung ist (in der Regel) drehungsfrei und reibungsfrei, die Grenzschicht dagegen reibungs- und damit drehungsbehaftet.

Kompliziertere Strömungsvorgänge führen nun naturgemäß zu einer komplizierteren asymptotischen Struktur.
Die Fragestellung dieser Arbeit lautet also:

> Ist es möglich, die asymptotische Struktur von stationären, laminaren abgelösten Strömungen für $Re^{-1} \to 0$ mit Hilfe der Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklungen zu erfassen?

Die Grundgleichungen für diese Strömungen sind die Navier-Stokes-Gleichungen (im folgenden als stationär und inkompressibel vorausgesetzt). Für das weitere Vorgehen sind folgende wichtige Voraussetzungen zu treffen:

(I) Für gegebene Randbedingungen existiert eine Lösung dieser Gleichungen.

(II) Die Lösung existiert für alle Re-Zahlen und ist eindeutig.

Gesucht ist die asymptotische Struktur dieser eindeutigen Lösung. Eine Überprüfung an der Realität ist direkt nicht möglich, da Strömungen bekanntlich bei höheren Re-Zahlen instationär bzw. turbulent werden.
Der erste Term einer asymptotischen Entwicklung, also die Grundlösung für $Re^{-1}=0$ ist eine Lösung der Euler-Gleichungen, die für $Re^{-1}=0$ unmittelbar aus den Navier-Stokes-Gleichungen hervorgehen.
Die entscheidende Schwierigkeit ist, daß bei gegebenen Randbedingungen die Lösung der Euler-Gleichungen nicht eindeutig ist, sondern unendlich viele Lösungen existieren. Der Grund hierfür ist, daß die Euler-Gleichungen keine Aussage über die geometrische Form des Ablösegebietes enthalten. Dies hat zur Folge, daß sehr viele verschiedene Modelle der Strömung für $Re^{-1}=0$ entwickelt worden sind, die alle Lösungen der Euler-Gleichungen darstellen. Einige dieser Modelle werden in Kapitel 5.2 dargestellt.
Es ist an dieser Stelle wichtig, daß Modellvorstellungen in der Physik nicht 'richtig' oder 'falsch', sondern nur verschieden geeignet, aussagekräftig und widerspruchsfrei sind. In diesem Sinne ist für die hier gestellte Aufgabe (eine asymptotische Struktur für $Re^{-1}\to 0$ zu finden) aus der Vielzahl der Modellvorstellungen höchstens eine geeignet, und zwar aus folgendem Grund:
Es war vorausgesetzt worden, daß für alle Re-Zahlen eine eindeutige Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mit vorgegebenen

Randbedingungen existiert. Dies heißt, daß die (gedachte) Lösung für den Grenzübergang $Re^{-1} \to 0$ auf eine eindeutige Grenzlösung führt. Diese ist dann auch Lösung der Euler-Gleichung. Genau diese Lösung gilt es, aus der Vielzahl der Euler-Lösungen zu finden. P.A. Lagerstrom [33] bezeichnet diese Lösung als relevante Euler-Lösung. Nur diese kann Grundlösung einer asymptotischen Beschreibung abgelöster laminarer Strömungen sein. Alle anderen Modelle sind deshalb nicht 'falsch', sondern nur nicht als Grundlösung einer asymptotischen Betrachtung geeignet. Im Sinne asymptotischer Terminologie könnten diese als 'irrationale Modelle' bezeichnet werden.
Das folgende Bild soll diesen Sachverhalt noch einmal verdeutlichen:

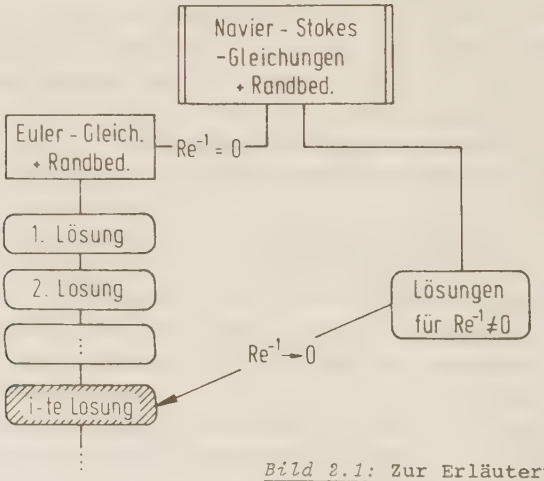


Bild 2.1: Zur Erläuterung des Begriffes 'relevante Euler-Lösung'

Das beschriebene Verfahren zur Auswahl der relevanten Euler-Lösung gibt nicht die konkrete Vorgehensweise an, da die Lö-

sungen der Navier-Stokes-Gleichungen natürlich nicht bekannt sind. Vielmehr sind bekannte oder neu zu entwickelnde Lösungen der Euler-Gleichungen auf ihre Tauglichkeit als Grundlösung einer asymptotischen Beschreibung zu untersuchen. Diese Arbeit ist ein Schritt auf dem Weg, die relevante Euler-Lösung, und damit das 'rationale Strömungsmodell' für laminare, abgelöste Strömungen zu finden.

2.2. Wichtige Schritte auf dem Weg zu einer rationalen Theorie laminarer, abgelöster Strömungen

Es sollen hier in knapper Form und chronologischer Reihenfolge die wichtigsten Entwicklungsschritte dargestellt werden.

1948 - Goldstein-Singularität

S. Goldstein [25] untersuchte das Verhalten einer laminaren Grenzschicht, die unter der Wirkung eines aufgeprägten Druckgradienten zur Ablösung kommt. Er zeigte, daß die Grenzschicht für $x^* \to 0^-$ (Ablösepunkt im Koordinatenursprung) eine Doppelstruktur entwickelt und im Ursprung singulär ist. Insbesondere gilt:

$$\tau_w^* \approx (-x^*)^{1/2} \quad \text{für} \quad x^* \to 0^- \tag{2.6}$$

$$v^* \approx (-x^*)^{-1/2} \quad \text{für} \quad x^* \to 0^- \tag{2.7}$$

Eine Fortsetzung der Grenzschichtrechnung über den Ablösepunkt hinaus ist damit nicht möglich. Es ist wichtig anzumerken, - dies wird häufig übersehen - daß es sich um eine asymptotische Theorie für $Re^{-1} \to 0$ handelt. Die Goldstein-Untersuchung zeigt nicht, daß τ_w für endliche Re-Zahlen am Ablösepunkt singulär ist, sondern vielmehr, daß gilt (s. Stewartson [51]):

$\lim_{Re \to \infty} \tau_w^* Re^{1/2}$ ist eine Funktion von x^*, die bei $x^*=0$ singulär ist,

1966 - Inverse Grenzschichtrechnung über den Ablösepunkt hinaus (Catherall und Mangler)

Catherall und Mangler [13] gelang es, eine laminare Grenzschicht mit einem Rückströmgebiet im wandnahen Teil der Grenzschicht zu berechnen. Sie gingen dabei folgendermaßen vor:

Unter der Wirkung eines positiven Druckgradienten wurde die Grenzschicht in Ablösenähe gebracht. Eine Fortführung dieser Rechnung führte zu numerischen Instabilitäten bei Annäherung an den Ablösepunkt. Stattdessen wurde im Bereich des Rückströmgebietes eine reguläre Verdrängungsdicken-Kontur willkürlich vorgegeben. Die Druckverteilung war dann ein Ergebnis der Grenzschichtrechnung (inverses Grenzschichtverfahren). Es ergaben sich keinerlei Anzeichen eines instabilen oder gar singulären Verhaltens.

Als wichtig bleibt festzuhalten:

1) Das erzeugte Rückströmgebiet liegt innerhalb der Grenzschicht, hat also eine Querabmessung $O(Re^{-1/2})$, d.h. endliche Rückströmgebiete existieren nur für endliche Re-Zahlen.

2) Inverse Grenzschichtverfahren erlauben eine numerisch stabile Berechnung von Grenzschichten mit Rückströmgebieten in Grenzschichtabmessungen.

3) Die Vorgabe der Verdrängungsdicke ist willkürlich und physikalisch nicht begründet.

1969 - Asymptotische Beschreibung wechselwirkender Grenzschichten - Triple-Deck-Theorie

In diesem Jahr gelang es in der Lösung von zwei strömungsmechanischen Problemen einen wesentlichen Schritt dadurch voranzukommen, daß der physikalische Mechanismus der Wechselwirkung von Grenzschicht und Außenströmung in seiner asymptotischen Struktur erfaßt werden konnte. Es handelte sich um die Wechselwirkung eines Verdichtungsstoßes mit einer laminaren

Grenzschicht und um die Umströmung der (Platten) -Hinterkante. Beide Strukturen erwiesen sich als sehr ähnlich, und es zeigte sich im folgenden eine Reihe weiterer Anwendungsmöglichkeiten. Der drei Schichten-Charakter der Strömung führte zum Namen 'Triple-Deck'-Theorie (Stewartson & Williams [48], Messiter [36], Neiland [39]).

1970 - Anwendung der Triple-Deck-Theorie in der Umgebung des Ablösepunktes

Die Ergebnisse der Grenzschichtrechnung für die Annäherung an den Ablösepunkt, z.B. $v^* \to 0$ +), legten die Vermutung nahe, daß es zu einer sehr starken Wechselwirkung mit der Außenströmung kommt, deren Berücksichtigung u.U. ein reguläres Verhalten der Grenzschicht am Ablösepunkt zur Folge hätte.
Stewartson [51] versuchte, anknüpfend an die Arbeit von Goldstein [25], die Wechselwirkung um den Ablösepunkt mit Hilfe der Triple-Deck-Theorie zu erfassen. Er kam zu dem Ergebnis, daß die Singularität an der Ablösestelle nicht zu beseitigen ist. Stewartson schreibt:
"It is concluded that the singularity is not removeable by the methods proposed (triple deck) and it is inferred that the singularity is a real phenomenon terminating the flow which, at high Reynolds number, exists upstream of O." (aus [51], Seite 347)
Von entscheidender Bedeutung ist die hier und in der Goldstein-Arbeit getroffene Voraussetzung: Die Ablösung erfolgt auf Grund eines positiven Druckgradienten, der auf einer endlichen Lauflänge wirkt.

+) ($v^* \triangleq$ Querkomponente der Geschwindigkeit am Außenrand der Grenzschicht)

1972 - Sychev-Theorie: laminare Ablösung ohne Goldstein-Singularität

Nachdem deutlich geworden war, daß die Goldstein-Singularität nicht zu beseitigen ist, war der nächste konsequente Schritt, sie zu vermeiden. Dies gelang Sychev [54] auf folgende Weise: Er geht von der Vorstellung ab, daß Ablösung einem endlichen Druckanstieggebiet folgt und nimmt an, die Strömung unterliege bis zum Ablösepunkt einem Druckgradienten $\frac{dp^*}{dx^*} \neq 0$, ausgenommen in einem asymptotisch kleinen Gebiet stromaufwärts des Ablösepunktes, in dem gilt:

Länge des Gebietes: $O(Re^{-\frac{1}{16}})$

positiver Druckgradient: $O(Re^{\frac{1}{8}})$

absuluter Druckanstieg: $O(Re^{-\frac{3}{16}})$

d.h. für $Re^{-1} \to 0$ aber $Re^{-1} \neq 0$ führt ein starker Druckgradient in einem kleinen Gebiet zu einem kleinen absoluten Druckanstieg.

Wichtig ist der asymptotische Charakter: Für $Re^{-1} = 0$ ist dieses Gebiet und damit auch der Druckanstieg identisch verschwunden, d.h. der Ablösung geht kein Druckanstieg voraus (wohlgemerkt nur für den Grenzfall $Re^{-1} = 0$). Die Goldstein-Singularität tritt damit nicht auf.

Sychev verbindet diese lokale Betrachtung des Ablösevorganges mit dem Modell der freien Stromlinien (Kirchhoff-Strömung s. Kap. 5.2) und kann zeigen, daß die jetzt noch vorhandene schwache Singularität (Re-Zahl abhängig, nur vorhanden für endliche Re-Zahlen) in eine Triple-Deck-Struktur eingepaßt werden kann. Das entstehende Gleichungssystem ist bis auf eine Konstante bestimmt. Es wird von Sychev nicht gelöst.

1977 - Lösung des Triple-Deck-Gleichungssystems im Rahmen der Sychev-Theorie

Während von Sychev selbst bezweifelt wurde, daß die freie Konstante des Systems allein aus der Triple-Deck-Theorie bestimmt werden kann, gelang es F.T. Smith [44], diese als Eigenwert des Problems zu ermitteln. Smith wies mit numerischen

Mitteln nach, daß eine Lösung des Triple-Deck-Systems existiert, eindeutig und regulär ist, d.h. die schwache Singularität am Ablösepunkt beseitigt werden kann.

Fazit:
Die asymptotische Beschreibung einer nicht singulären Strömungsablösung mit Hilfe der Triple-Deck-Theorie ist möglich. Sie setzt eine Außenströmung voraus, die im Grenzfall $Re^{-1}=0$ nicht durch ein endliches Druckanstieggebiet zur Goldstein-Singularität führt. Der mit der Ablösung verbundene Druckanstieg wird im dort vorhandenen Triple-Deck induziert.

2.3. Problemformulierung

2.3.1. Voraussetzungen

Um die asymptotische Struktur abgelöster Strömungen zu untersuchen, soll eine Körperumströmung gewählt werden, die

- zur Ablösung und einem Wiederanlegen der Strömung in endlichem Abstand führt (endliche Ablösegebiete)
- den Ablösepunkt nicht geometrisch fixiert (etwa durch eine Ecke, o.ä.)

Die Strömung sei

- laminar
- zweidimensional
- inkompressibel
- stationär

2.3.2. Geometrie

Als Modell-Geometrie soll eine Delle in einer ebenen Wand betrachtet werden, die L* von der Vorderkante entfernt liegt

(s. Bild 2.2). Die Delle $y_K^* = y_K^*(x^*)$ hat die Form (bei der die Krümmung am Dellenbeginn gleich Null, und somit im ganzen Bereich kontinuierlich ist):

$$\frac{y_K^*}{H^*} = -\frac{1}{4}\left\{\cos 2\pi\left[\frac{x^*}{l^*} + \frac{1}{2}\right] - 1\right\}^2 \qquad -\frac{l^*}{2} \le x^* \le \frac{l^*}{2} \qquad (2.8)$$

Im Grenzfall $H^* = 0$ liegt die ebene Platte vor. Wird H^* vergrößert, so kommt es ab einem bestimmten Wert H^* zur Strömungsablösung.

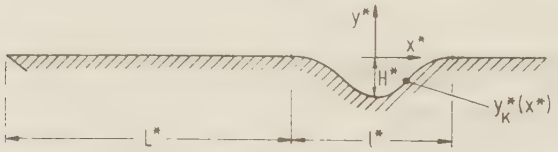


Bild 2.2: Modellgeometrie

2.3.3. Grundgleichungen

Gesucht ist, wie im Kapitel 2.1 beschrieben, die asymptotische Struktur der Navier-Stokes-Gleichungen für $Re^{-1} \to 0$.
Die Re-Zahl ist von hier ab definiert als

$$Re = \frac{U_\infty L^*}{\nu} \qquad (2.9)$$

wobei U_∞ die ungestörte Anströmung, ν die kinematische Viskosität und L^* der Abstand zur Plattenvorderkante (s. Bild 2.2) sind.

Es wird im weiteren mit folgenden dimensionslosen Größen gearbeitet:

x^*	y^*	u^*	v^*	p^*	ψ^*
$x=\frac{x^*}{L^*}$	$y=\frac{y^*}{L^*}$	$u=\frac{u^*}{U_\infty}$	$v=\frac{v^*}{U_\infty}$	$p=\frac{p^*-p_\infty}{\rho U_\infty^2}$	$\psi=\frac{\psi^*}{U_\infty L^*}$

Tabelle 2.1: Dimensionslose Größen der Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen lauten in kartesischen Koordinaten:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+Re^{-1}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+Re^{-1}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \qquad (2.10)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (2.11)$$

Randbedingungen sind:

an der Wand: $u=v=0$ (Haftbedingung)

weit außen, $(x^2+y^2)^{-1}\to 0$: $u=U_\infty$, $v=0$ (2.12)

2.3.4. Parameter des Problems

Die zum Testfall erklärte Dellenströmung hat folgende Parameter:

geometrische Parameter:	1) Dellentiefe H^*
	2) Dellenlänge l^*
	3) Vorderkantenabstand L^*
Strömungsparameter:	4) Anströmgeschwindigkeit U_∞
Stoffparameter:	5) Dichte ρ
	6) Viskosität η

Mit diesen 6 Einflußgrößen lassen sich nach den Gesetzen der Dimensionsanalyse bei drei Grundgrößen (m,s,kg) drei dimensionslose Kennzahlen bilden, z.B.:

(1) $$\varkappa_H \equiv \frac{H^*}{l^*} \qquad (2.13)$$

(2) $$\varkappa_L \equiv \frac{L^*}{l^*} \qquad (2.14)$$

(3) $$Re = \frac{\rho U_\infty L^*}{\eta}$$

Für $H^* \to 0$ geht die Testströmung in die ungestörte Plattenströmung (Blasius) über. Stromaufwärts der Delle ist deshalb für $H^* \neq 0$ eine (durch die Delle) gestörte Plattengrenzschicht vorhanden. Zur Kennzeichnung dieser Grenzschicht sei als dimensionsloser Parameter eingeführt:

$$\varkappa = \frac{\delta^*}{H^*} \qquad (2.15)$$

δ^* ist die (gedachte) Blasiussche Grenzschichtdicke der ungestörten Plattenströmung am Dellenbeginn. δ^* ist von der gleichen Größenordnung wie die tatsächlich vorhandene, gestörte Grenzschicht.
$\varkappa$ ist kein zusätzlicher Parameter, sondern ergibt sich aus den drei unabhängigen Parametern zu:

$$\varkappa = 5{,}0 \, \frac{L^*}{l^*} \left(\frac{H^*}{l^*}\right)^{-1} Re^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.16)$$

Dabei ist δ^* definiert als Wandabstand, bei dem die Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht 99 % der Außenströmung erreicht.
Der Parameter $\varkappa$ hat sich als physikalisch wichtige Größe herausgestellt, der in seinen Grenzfällen $\varkappa \to 0$ und $\varkappa^{-1} \to 0$ asymptotisch verschieden zu interpretierende Strömungen darstellt:

I] $\underline{\varkappa^{-1} \to 0}$: Die ankommende Grenzschicht ist dick im Vergleich zur Dellentiefe; das Ablösegebiet, falls vorhanden, liegt im wandnahen Bereich der Grenzschicht.

II] $\underline{\varkappa \to 0}$: Die ankommende Grenzschicht ist dünn im Vergleich zur Dellentiefe; kommt es zur Ablösung, so verläßt die Grenzschicht als Ganzes die Wand und wird zur freien Scherschicht.

Bild 2.3:

Drei-Parameter-Feld der Dellenströmung

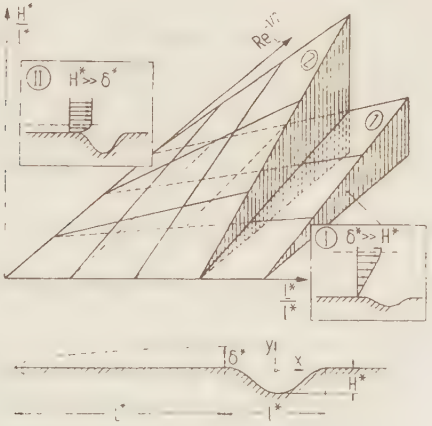


Bild 2.3 veranschaulicht die Lage beider Bereiche im Drei-Parameter-Feld der Strömung:
Bereich (I) unterhalb der Fläche (1) (diese beschreibt den Wert $\varkappa = c_1 \gg 1$)
Bereich (II) oberhalb der Fläche (2) (diese beschreibt den Wert $\varkappa = c_2 \ll 1$)
Bei der gewählten Darstellung sind Flächen $\varkappa$ = Const. jeweils hyperbolische Paraboloide im Raum $(L^*/l^*, H^*/l^*, Re^{-1/2})$.

2.3.5. Präzisierung des Begriffes 'Ablösung'

In der Literatur, die sich mit abgelöster Strömung befaßt, ist eine Reihe von Begriffen zu finden, die oft unpräzise unter dem Begriff 'Ablösung' subsummiert werden, nämlich:

- break-away (point)
- point of vanishing skin friction
- separation (point)
- catastrophic separation
- separation bubble

Eine Präzisierung kann etwa folgendermaßen erfolgen:

break-away point: Ein Begriff, der sinnvoll bei Euler-Lösungen ($Re^{-1} = 0$) Anwendung findet. Er beschreibt die Konturstelle, an der die Wandstromlinie (üblicherweise $\Psi = 0$) sich aufteilt und mit einer Verzweigung die Wand verläßt.

point of vanishing skin friction: Dieser Punkt liegt an der Stelle mit $\tau_w = 0$ einer Grenzschichtrechnung ($Re^{-1} \to 0$) und wird in der Regel als 'separation point' definiert. Er kann in Bezug auf den 'break-away point' liegen:

a) bei Modellen, die mit der Goldstein-Singularität arbeiten: am oder stromabwärts vom 'break-away point', nicht aber stromaufwärts, wenn angenommen wird, daß bei anliegender Strömung eine reguläre Grenzschicht existiert, s. Kaplun [27].
b) bei Modellen, die ohne Goldstein-Singularität arbeiten (z.B. Sychev-Theorie) : beliebig.

Sehr viele Modelle gehen davon aus, daß 'separation point' und 'break-away point' zusammenfallen. Dies ist aber nicht notwendig. In der asymptotischen Theorie laminarer Ablösung (Kap. 5) ist die Tatsache, daß beide Punkte nicht zusammenfallen von entscheidender Bedeutung.

catastrophic separation: Hiermit ist gemeint, daß die Grenzschicht als Ganzes die Wand verläßt und die Linie $\Psi=0$ Wandabstände $\gg \delta^* = O(Re^{-1/2})$ annimmt, also z.B. Abstände von der Größenordnung $O(1)$; damit entstehen Ablösegebiete von der Größenordnung $O(1)$. Dies ist der Grenzfall

$$\varkappa \to 0 \quad ; \quad Re^{-1} \to 0 \quad \text{(asymptotische Theorie)}$$

separation bubble: Liegt das abgelöste Gebiet im wandnahen Teil der Grenzschicht, hat also die Linie $\Psi=0$ Wandabstände $\leq \delta^* = O(Re^{-1/2})$ so spricht man von 'separation bubble'. Dies ist der Grenzfall

$$\varkappa^{-1} \to 0 \quad ; \quad Re^{-1} \to 0 \quad \text{(asymptotische Theorie)}$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit soll nur der Fall 'catastrophic separation' als 'Ablösung' bezeichnet werden. Der andere Grenzfall ('separation bubble') soll als 'Grenzschicht mit Rückströmung' bezeichnet werden. Diese strenge Unterscheidung ist in der Literatur nicht üblich, obwohl in Ansätzen vorhanden (s. z.B. Bradshaw [6]), erscheint aber physikalisch sinnvoll und gerechtfertigt, wie die weitere Arbeit zeigen wird.

3. Grenzschichten in Wechselwirkung mit der Außenströmung

Wie in Kapitel 2.2 beschrieben ist mit der sog. Triple-Deck-Theorie die asymptotische Struktur einer mit der Außenströmung in Wechselwirkung stehenden Grenzschicht beschrieben. Wechselwirkung mit der Außenströmung bedeutet hierbei, daß die

übliche Grenzschicht-Hierarchie durchbrochen ist, d.h. daß Außenströmung und Grenzschicht nicht mehr nacheinander im Sinne aufsteigender Ordnung berechnet werden können. Es kommt vielmehr zu einem simultanen Prozeß zwischen einer Verdrängungswirkung (entstanden in Wandnähe) und einer Druckverteilung (induziert in der Außenströmung), die sich gegenseitig bedingen.
Die physikalische Ursache hierfür kann sehr verschiedener Natur sein: plötzliche Beschleunigung der Strömung an der Plattenhinterkante, Störung der Wandkontur, plötzlicher Wechsel der Randbedingungen am Ablösepunkt, o.ä.
Für die ausführliche Herleitung der Triple-Deck-Gleichungen sei auf die Literatur verwiesen, insbesondere auf K. Stewartson, P.G. Williams [48], K. Stewartson [49]. Es sollen hier nur die wichtigsten Schritte und Grundgedanken wiedergegeben werden.

3.1. Die Triple-Deck-Gleichungen

Der Störparameter des Problems ist die Reynolds-Zahl in der Form:

$$\boxed{\epsilon = Re^{-\frac{1}{8}}} \qquad (3.1)$$

Die asymptotische Struktur besteht aus drei Schichten:

(1) einer Schicht im wandnahen Bereich der Grenzschicht - dem 'lower deck'

(2) einer mittleren Schicht, die im wesentlichen eine Fortführung der ankommenden Grenzschicht darstellt - dem 'main deck'

(3) einer Schicht außerhalb der Grenzschicht, die in die Potentialströmung hineinreicht - dem 'upper deck'

Die in den drei Schichten geltenden Streckungen ('scaling laws') ergeben sich im Zuge der Herleitung. Sie sollen hier in Tabelle 3.1. vorweggenommen werden:

Tabelle 3.1:
'scaling laws'
im Triple-Deck

	NAVIER-STOKES	LOWER DECK	MAIN DECK	UPPER DECK
x^*	$x=\frac{x^*}{L^*}$	$X_T=\frac{x^*-x_o^*}{L^*\epsilon^3}$	$X_T=\frac{x^*-x_o^*}{L^*\epsilon^3}$	$X_T=\frac{x^*-x_o^*}{L^*\epsilon^3}$
y^*	$y=\frac{y^*}{L^*}$	$Y_L=\frac{y^*}{L^*\epsilon^5}$	$Y_M=\frac{y^*}{L^*\epsilon^4}$	$Y_U=\frac{y^*}{L^*\epsilon^3}$

Zur Herleitung des Triple-Deck-Gleichungssystems werden in den drei Schichten asymptotische Entwicklungen der drei abhängigen Variablen u, v und p aufgestellt, in die Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt und den Ordnungen in ϵ entsprechend angepaßt (matching).

'main deck'

Die asymptotische Entwicklung lautet:

$$\begin{aligned} u(X_T,Y_M,\epsilon) &= u_o(Y_M) + \epsilon\, u_1(X_T,Y_M) + \epsilon^2 u_2(X_T,Y_M) + \dots \\ v(X_T,Y_M,\epsilon) &= \epsilon^2 v_1(X_T,Y_M) + \epsilon^3 v_2(X_T,Y_M) + \dots \\ p(X_T,Y_M,\epsilon) &= \epsilon\, p_1(X_T,Y_M) + \epsilon^2 p_2(X_T,Y_M) + \dots \end{aligned} \qquad (3.2)$$

u_o ist das ungestört ankommende Grenzschichtprofil (z.B. das Blasius-Plattenprofil).
Es stellt sich heraus, daß p_1 in allen drei Schichten unabhängig von Y ist. Soll der Druck also nicht von außerhalb des Triple-Decks aufgeprägt sein, muß gelten:

$$p_1(X_T, Y_M) \equiv 0 \tag{3.3}$$

Einsetzen und Ordnen nach Potenzen von ϵ zeigt, daß u_1 und v_1 aus reibungslosen Gleichungen folgen:

$$u_1(X_T, Y_M) = A_1(X_T)\frac{du_o}{dY_M} \tag{3.4}$$

$$v_1(X_T, Y_M) = -u_o\frac{dA_1(X_T)}{dX_T} \tag{3.5}$$

$A_1(X_T)$ ist eine zunächst unbestimmte Funktion von X_T.
Die Geschwindigkeitskomponente u lautet also nach Gleichung (3.2) und (3.4):

$$u(X_T, Y_M, \epsilon) = u_o(Y_M) + \epsilon A_1(X_T)\frac{du_o}{dY_M} + \ldots = u_o(Y_M + \epsilon A_1(X_T)) \tag{3.6}$$

Im Sinne einer Taylor-Entwicklung interpretiert ist dies also ein um den Betrag $\epsilon A_1(X_T)$ in Y_M-Richtung versetztes Profil.
Für die nächst höhere Ordnung gilt:

$$v_2(X_T, Y_M) = -u_o\frac{dp_2}{dX_T}\int_{Y_M}^{\infty}(u_o^{-2}-1)\,dY_M + u_o\frac{dp_2}{dX_T}Y_M - A_1\frac{dA_1}{dX_T}\frac{du_o}{dY_M} - \frac{dA_2}{dX_T}u_o \tag{3.7}$$

Dabei wurde verwendet

$$p_2(X_T, Y_M) = p_2(X_T) \tag{3.8}$$

u_2 folgt entsprechend aus der Kontigleichung, A_2 ist eine weitere zunächst unbekannte Funktion von X_T.
Das 'main-deck' muß für $Y_M \to \infty$ an das 'upper-deck' und für $Y_M \to 0$ an das 'lower-deck' angepaßt werden. Die entsprechenden matching-Bedingungen sind in Tabelle 3.2 enthalten:

	$u_1 \rightarrow$	$u_2 \rightarrow$	$v_1 \rightarrow$	$v_2 \rightarrow$
$Y_M \rightarrow \infty$	0	$-P_2(X_T)$	$-\frac{dA_1}{dX_T}$	$-\frac{dA_2}{dX_T}+\frac{dp_2}{dX_T}Y_M$
$Y_M \rightarrow 0$	$A_1\frac{du_0}{dY_M}\Big\|_0$	0	0	$-A_1\frac{dA_1}{dX_T}\frac{du_0}{dY_M}\Big\|_0$
aus Gl.	(3.4)	(3.7)+Konti	(3.5)	(3.7)

Tabelle 3.2: Matching-Bedingungen im Triple-Deck

'upper deck'

Aufgrund der matching-Bedingungen, Tabelle 3.2, wird folgende Entwicklung gewählt:

$$\begin{aligned} u(X_T,Y_u,\epsilon) &= 1 + \epsilon^2 U_2(X_T,Y_u) + \epsilon^3 U_3(X_T,Y_u) + \dots \\ v(X_T,Y_u,\epsilon) &= \epsilon^2 V_2(X_T,Y_u) + \epsilon^3 V_3(X_T,Y_u) + \dots \\ p(X_T,Y_u,\epsilon) &= \epsilon^2 P_2(X_T,Y_u) + \epsilon^3 P_3(X_T,Y_u) + \dots \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Einsetzen von Gl. (3.9) in die Navier-Stokes-Gleichungen und Ordnen nach Potenzen von ϵ zeigt, daß die Strömung bis zur Ordnung $O(\epsilon^3)$ reibungs- und drehungsfrei ist.
Die Lösung der Laplace-Gleichung (liniarisiert in den Randbedingungen im Sinne einer Quellverteilung auf $Y_u=0$, s. Kap. 3.2.3) führt auf:

$$P_n(X_T,0) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V_n(\bar{X}_T,0)}{X_T-\bar{X}_T}\,d\bar{X}_T \quad ; \quad n=2,3 \qquad (3.10)$$

'Matching' mit dem 'main-deck' gibt z.B. für n=2:

$$P_2(X_T,0) = P_2(X_T) \quad ; \quad V_2(X_T,0) = -dA_1(X_T)/dX_T$$

so daß gilt:

$$p_2(X_T) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dA_1/d\bar{X}_T}{X_T - \bar{X}_T} d\bar{X}_T \qquad (3.11)$$

bzw. nach Inversion des Hilbert-Integrals:

$$\frac{dA_1}{dX_T} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_2(\bar{X}_T)}{X_T - \bar{X}_T} d\bar{X}_T \qquad (3.12)$$

Wichtig ist, daß mit Gleichung (3.10) für $Y_u \to \infty$ die Außenrandbedingung $V_n \to 0$ (für alle X_T) erfüllt ist; d.h. außerhalb des Triple-Decks ist die Störung abgeklungen.
Gleichung (3.11) ist eine Beziehung zwischen den unbekannten Funktionen $p_2(X_T)$ und $A_1(X_T)$. Die zweite Beziehung liefert das 'lower-deck'.

'lower deck'

Diese Unterschicht wird nötig, da die Haftbedingung an der Wand durch das 'main deck' nicht erfüllt ist, wie Tabelle 3.2 zeigt. Die asymptotischen Entwicklungen hierfür lauten:

$$\begin{aligned} u(X_T, Y_L, \epsilon) &= \epsilon\, \tilde{u}_1(X_T, Y_L) + \epsilon^2 \tilde{u}_2(X_T, Y_L) + \dots \\ v(X_T, Y_L, \epsilon) &= \epsilon^3 \tilde{v}_1(X_T, Y_L) + \epsilon^4 \tilde{v}_2(X_T, Y_L) + \dots \\ p(X_T, Y_L, \epsilon) &= \epsilon^2 \tilde{p}_2(X_T, Y_L) + \epsilon^3 \tilde{p}_3(X_T, Y_L) + \dots \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Nach Einsetzen in die Navier-Stokes-Gleichungen und Ordnen nach Potenzen von ϵ ergeben sich zur niedrigsten Ordnung die Prandtl'schen Grenzschicht-Gleichungen.
Für das bei $X \to -\infty$ ankommende, ungestörte Profil gilt:

$$u_o(Y_H) = \overbrace{u_o(0)}^{=0} + Y_H \left.\frac{du_o}{dY_H}\right|_o + \dots = \epsilon\, Y_L \left.\frac{du_o}{dY_H}\right|_o + \dots \quad \text{für } y \to 0 \qquad (3.14)$$

Durch eine einfache Transformation ist es möglich, die Größe

$$\left.\frac{dU_o}{dY_M}\right|_o = \lambda \qquad (3.15)$$

zu eliminieren (λ =0,332 für das Blasius-Profil). Es ist üblich, in diese Transformationen die 'gage-functions' der ersten Ordnung (s. Gl.(3.13)) mit einzubeziehen, da im weiteren nur die Funktionen $\tilde{u}_1$, $\tilde{v}_1$, $\tilde{p}_2$ verwendet werden (Triple-Deck 1.Ordnung). Tabelle 3.3 enthält diese Transformation :

x^*	y^*	u^*	v^*	p^*	A_1
$X=\frac{(x^*-x_o^*)\,\lambda^{5/4}}{L^*\,\epsilon^3}$	$Y=\frac{y^*\,\lambda^{3/4}}{L^*\,\epsilon^5}$	$U=\frac{u^*\,\lambda^{-1/4}}{U_\infty\,\epsilon}$	$V=\frac{v^*\lambda^{3/4}}{U_\infty\epsilon^3}$	$P=\frac{(p^*-p_\infty)\,\lambda^{-1/2}}{\rho U_\infty^2\epsilon^2}$	$A=\lambda^{3/4}A_1$

Tabelle 3.3: 'lower deck'-Transformation

Die 'lower-deck'-Gleichungen (1. Ordnung) lauten damit:

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=-\frac{dP}{dX}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \qquad (3.16)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \qquad (3.17)$$

$$X\to-\infty : \quad U\to Y \qquad (3.18)$$

$$Y=0 : \quad U=V=0 \qquad (3.19)$$

$$Y\to\infty : \quad U-Y\to A(X) \qquad (3.20)$$

Die Randbedingung (3.20) entsteht durch Anpassen (matching) von 'lower' und 'main deck', wobei gilt (s. Gleichung(3.11),(3.12)):

$$P=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dA/d\bar{X}}{X-\bar{X}}\,d\bar{X} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dA}{dX}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\bar{X})}{X-\bar{X}}\,d\bar{X} \qquad (3.21)$$

Das Triple-Deck-Problem reduziert sich damit auf die Lösung der gewöhnlichen Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen mit allerdings ungewohnten Randbedingungen.
Aus den drei Gleichungen (3.16), (3.17), (3.21) und der Matching-Bedingung (3.20) sind die vier Funktionen U(X,Y), V(X,Y), P(X) und A(X) zu bestimmen.
Die physikalische Interpretation der Triple-Deck-Gleichungen wurde bereits in der Einleitung zu Kap. 3 angedeutet:
Die Verdrängungswirkung der wandnahen Schicht (lower deck), charakterisiert durch A(X), wird durch die im Profil unveränderte, nur entsprechend seitlich versetzte Mittelschicht ('main deck') in die Außenschicht ('upper deck') weitergeleitet. Hier erzeugt diese Verdrängungswirkung eine lokal auf das 'upper deck' und die darunter liegenden Schichten begrenzte Druckverteilung. Diese wiederum muß so beschaffen sein, daß sie im 'lower deck' zur eingangs erwähnten Verdrängungswirkung führt.
'Verdrängungswirkung' heißt in diesem Zusammenhang stets: eine zur Verdrängung des ungestörten Profils (diese sei $\bar{\delta}_{10} \equiv \frac{\delta^*_{10}}{L^*} Re^{1/2}$) zusätzlich wirkende, im Triple-Deck erzeugte Verdrängung $\bar{\delta}_{1T} \equiv \frac{\delta^*_{1T}}{L^*} Re^{1/2}$.
Nach Gleichung (3.6) gilt der Zusammenhang:

$$\boxed{\bar{\delta}_{1T} = -\epsilon \lambda^{\frac{3}{4}} A(X)} \qquad (3.22)$$

Die gesamte Verdrängungswirkung ist damit:

$$\boxed{\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_{10} + \bar{\delta}_{1T} = \bar{\delta}_{10} - \epsilon \lambda^{\frac{3}{4}} A(X)} \qquad (3.23)$$

$\bar{\delta}_{10}$ ist im Triple-Deck konstant (gleich dem Wert des ankommenden Profils), da für das ungestörte Profil im Bereich des Triple-Decks (also in Lauflängen $O(\epsilon^3)$) gilt:

$$\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_{10} + O(\epsilon^3)$$

3.2. Lösung der Triple-Deck-Gleichungen

3.2.1. Iterationsschema

Das Gleichungssystem (3.16)-(3.21) macht deutlich, daß eine Lösung iterativ erfolgen muß. Zwei Wege sind prinzipiell möglich:

(I) a) Vorgabe von P(X)
b) Berechnung von A (X) aus der Grenzschichtgleichung
c) Berechnung einer Funktion $P_{NEU}(X)$ aus dem Hilbert-Integral
d) Sprung nach b) und Iteration bis zur Konvergenz des Systems.

Dieses Schema versagt, sobald im Schritt b) eine Wandschubspannung $\tau_w=0$ auftritt. Der aufgeprägte Druckgradient führt zur Goldstein-Singularität.

(II) a) Vorgabe von A(X)
b) Berechnung von P(X) aus der Grenzschichtgleichung (inverses Grenzschichtverfahren)
c) Berechnung einer Funktion $A_{NEU}(X)$ aus dem Hilbert-Integral
d) Sprung nach b) und Iteration bis zur Konvergenz des Systems.

Das inverse Grenzschichtverfahren (siehe nachfolgendes Kapitel) ermöglicht es, über den Punkt mit $\tau_w=0$ ('separation point') hinaus zu rechnen, ohne daß ein singuläres Verhalten auftritt.
Als Konvergenzkriterium des Iterationsprozesses kann gelten:

$$\frac{A_{NEU} - A}{A} \leq C_k \quad \text{für alle } X \tag{3.24}$$

Wobei C_k eine kleine Zahl (z.B. 10^{-4}) ist.
Die Rechnung zeigt, daß eine Unterrelaxation im Iterations-

prozeß erforderlich ist. Diese ist definiert als:

$$A = \omega A_{ALT} + (1-\omega) A_{NEU} \qquad (3.25)$$

Für ω=0.9 zum Beispiel bedeutet dies, daß im nächsten Iterationsschritt zu 90% die Größe A aus dem vorletzten und zu 10% aus dem letzten Schritt Verwendung findet.

3.2.2. Inverses Grenzschichtverfahren

Als inverse Verfahren werden alle Grenzschichtverfahren bezeichnet, die nicht die Druckverteilung als Randbedingung vorgeben, sondern entweder die Wandschubspannung oder die Verdrängungsdicke. Für die Triple-Deck-Gleichungen wird ein inverses Verfahren mit Vorgabe der Verdrängungsdicke benötigt.

Catherall und Mangler [13] haben als erste gezeigt, daß es mit einem solchen Verfahren möglich ist, über den Punkt mit τ_w=0 hinauszurechnen. Es sind im folgenden eine Reihe von inversen Verfahren entwickelt worden, s. z.B.: J.E. Carter [12], H.P. Horton [26], T. Cebici, P. Bradshaw [14].
Es wurde hier in Anlehnung an T. Cebici, P. Bradshaw [14] ein eigenes Verfahren entwickelt, da das inverse Grenzschichtverfahren anschließend auf die speziellen Bedingungen des Triple-Deck umgestellt werden mußte.
Ausgangspunkt sind die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen in Form der Stromfunktion Ψ. Die dimensionslosen Größen sind Tabelle 3.4 zu entnehmen.

x^*	y^*	p^*	Ψ^*	δ_1^*	τ_w^*
$x = \frac{x^*}{L^*}$	$\bar{y} = \frac{y^*}{L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	$p = \frac{p^* - p_\infty}{\rho U_\infty^2}$	$\Psi = \frac{\Psi^*}{U_\infty L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	$\bar{\delta}_1 = \frac{\delta_1^*}{L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	$c_f = \frac{\tau_w^*}{\rho U_\infty^2}$

Tabelle 3.4: Dimensionslose Größen der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \bar{y}^3} - \frac{dp}{dx} = \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial \bar{y}} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{y}^2}} \qquad (3.26)$$

Mit den Randbedingungen:

$$\bar{y} = 0 \quad : \quad \Psi = \Psi' = 0 \qquad (3.27)$$

$$\bar{y} \to \infty \quad : \quad \Psi = \sqrt{1-2p}\,(\bar{y} - \bar{\delta}_1(x)) \qquad (3.28)$$

Gleichung (3.26) ist eine DGL für Ψ mit p als Eigenwertfunktion. Die vorgegebene Verdrängungsdicke geht als $\bar{\delta}_1(x)$ in die Randbedingung (3.28) ein. Die Funktion des Zahlenwertes θ wird im Abschnitt 'Behandlung von Rückströmgebieten' erläutert.

Um im weiteren das Lösungsgebiet verschiedenen geometrischen Wandformen anpassen zu können, soll die Variable $\bar{y}$ noch mit einer Funktion f(x) gestreckt werden. Es handelt sich also um die Transformation:

$$(x, \bar{y}) \longrightarrow (x, \tilde{y}) \qquad \text{mit} \qquad \tilde{y} = \frac{\bar{y}}{f(x)} \qquad (3.29)$$

Gleichung (3.26) geht damit über in (dabei gilt die Schreibweise $' = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}$):

$$\boxed{\Psi''' - f^3 \frac{dp}{dx} = f\left[\theta \Psi' \frac{\partial \Psi'}{\partial x} - \Psi'' \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right] - \theta \frac{df}{dx} \Psi'^2} \qquad (3.30)$$

mit den Randbedingungen:

$$\tilde{y} = 0 \quad : \quad \Psi = \Psi' = 0 \qquad (3.31)$$

$$\tilde{y} \to \infty \quad : \quad \Psi = \sqrt{1-2p}\,[f\tilde{y} - \bar{\delta}_1] \qquad (3.32)$$

Da es sich bei Gleichung (3.30) um eine parabolische DGL handelt, erfolgt die Integration schrittweise in Strömungsrichtung. Bei jedem Schritt ist durch ein Iterationsverfahren der Eigenwert p(x) so zu bestimmen, daß die Bernoulli-Gleichung

$$f^2 p + \frac{1}{2}\psi'^2 = \text{const.} \quad \text{für} \quad \tilde{y} \to \infty \tag{3.33}$$

erfüllt ist (s. dazu auch H.B. Keller [29]).
Eine andere Vorgehensweise, die auch hier gewählt wurde, ist möglich:
Statt mit p=p(x) implizit die Impulsgleichung in $\tilde{y}$-Richtung (nämlich $\partial p/\partial \tilde{y}=0$) zu erfüllen, setzt man $p=p(x,\tilde{y})$ und nimmt als weitere DGL hinzu:

$$\frac{\partial p(x,\tilde{y})}{\partial \tilde{y}} = 0 \tag{3.34}$$

Damit kann dann eine zusätzliche Randbedingung erfüllt werden. Dieses Vorgehen ist in der Literatur unter dem Namen 'Mechul function approach' bekannt (s. H.B. Keller [30], T. Cebesi, P. Bradshaw [14], 'Mechul' ist türkisch für 'unbekannt'). Konsequenterweise ist der Druckterm in Gleichung (3.30) dann als $f^3 \partial p/\partial x$ zu schreiben.
Für die weitere numerische Behandlung wird Gl. (3.30) in drei DGL'n 1. Ordnung geschrieben, so daß zusammen mit Gl. (3.34) folgendes System von DGL'n entsteht:

$$\begin{aligned} \psi' &= U \\ U' &= T \\ T' &= f\left[\Theta U \frac{\partial U}{\partial x} - T\frac{\partial \psi}{\partial x}\right] - \Theta \frac{df}{dx} U^2 + f^3 \frac{\partial p}{\partial x} \\ p' &= 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dies sind vier DGl'n für die Funktionen Ψ, U, T, p mit den vier Randbedingungen:

$$\tilde{y} = 0: \quad \Psi = 0 \tag{3.36}$$

$$U = 0 \tag{3.37}$$

$$y \to \infty: \quad \Psi = \sqrt{1-2p}\,[f\tilde{y} - \bar{\delta}_1] \tag{3.38}$$

$$f^2 p + 1/2 \cdot U^2 = \text{const.} \tag{3.39}$$

Gleichung (3.35) ist ein System aus nichtlinearen, partiellen DGln.
Kapitel 3.4.1 enthält eine Beschreibung der gewählten Diskretisierung ('box-scheme'), Linearisierung (Newton-Methode) und Lösungsmethode (Block-Eliminations-Methode).

Behandlung von Rückströmgebieten

Solange es nicht zu Rückströmungen kommt sind die Grenzschichtgleichungen parabolischen Typs, was die schrittweise numerische Lösung in Strömungsrichtung ermöglicht. Tritt Rückströmung auf, so kommt es zu einem Typenwechsel in der Differentialgleichung, dem in der numerischen Lösung Rechnung getragen werden muß. Es haben sich drei Möglichkeiten als praktikabel erwiesen:

I) Die korrekte Behandlung erfordert es, die Integrationsrichtung der örtlichen Strömungsrichtung anzupassen. In dem von P.G. Williams [57] entwickelten Verfahren entstehen dabei zwei Lösungsgebiete (Hauptströmungsgebiet; Rückströmgebiet), die iterativ angepaßt werden müssen. Dieses Verfahren ist unter dem Namen DUIT (downstream, upstream integration) bekannt.

II) Der Typenwechsel in der DGL ergibt sich durch den Vorzeichenwechsel des Konvektionstermes $U\partial U/\partial X$ in Gleichung (3.16) bzw. $f\theta\Psi'\partial\Psi/\partial x$ in Gleichung (3.30). Der parabolische Charakter der DGL kann wiederhergestellt werden, wenn dieser Term in den Gebieten willkürlich zu Null gesetzt wird, in denen Rückströmung auftritt (sobald also gilt $U<0$ bzw. $\Psi'<0$). Dieses Verfahren wurde zuerst von Flügge-Lotz und Reyhner [22] vorgeschlagen und ist unter dem Namen 'FLARE-approximation' (Flügge-Lotz and Reyhner) bekannt. Die FLARE-Näherung ist der erste Schritt in dem unter I) beschriebenen Iterationsverfahren DUIT. Für kleine Rückströmgebiete in Wandnähe stellt FLARE eine sehr gute Näherung dar, die aus diesem Grunde häufig verwendet wird.
Auch in dieser Arbeit wird das Rückströmgebiet ausschließlich mit der Methode FLARE behandelt. Dies geschieht, indem in Gleichung (3.30) für θ folgende Werte gesetzt werden:

$$\theta = 1 \quad \text{für} \quad \Psi' \geq 0$$

$$\theta = 0 \quad \text{für} \quad \Psi' < 0 \qquad (3.40)$$

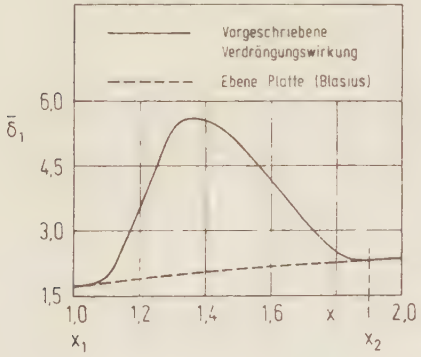
III) Eine dritte Methode ist bekannt unter dem Namen IGNORE. Diese Methode ignoriert den Typenwechsel und integriert auch im Rückströmgebiet in Hauptströmungsrichtung. Die zu erwartende numerische Instabilität tritt erst bei sehr großen Rückströmgebieten auf. Eine Untersuchung von Dijkstra [20] zeigt, daß die Übereinstimmung zwischen DUIT und IGNORE hervorragend ist, solange dieses Verfahren numerisch stabil ist.

Beispielrechnungen:

Das hier benutzte Verfahren wurde zunächst an einem aus der Literatur bekannten Beispiel getestet, Carter [12] hat dabei eine Verdrängungsdicke

$$\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_{1\,BLASIUS} + \bar{\delta}_{1z} \qquad (3.41)$$

vorgegeben, s. Bild 3.1. $\bar{\delta}_{1z}$ liegt in Form zweier angepaßter Polynome analytisch vor.



x	$\bar{\delta}_1$
$x \le x_0$	$1.7208\,x^{1/2}$
$x_0 < x \le x_1$	$a_1 + a_2(x-x_0) + a_3(x-x_0)^2 + a_4(x-x_0)^3$
$x_1 < x \le x_2$	$\bar{a}_1 + \bar{a}_3(x-x_1)^3 + \bar{a}_4(x-x_1)^3$
$x_2 < x$	$1.7208\,x^{1/2}$

$x_0 = 1.065$ $\quad a_1 = 1.7758$ $\quad \bar{a}_1 = 5.6$
$x_1 = 1.35$ $\quad a_2 = 0.8337$ $\quad \bar{a}_3 = -34.0656$
$x_2 = 1.884$ $\quad a_3 = 135.3942$ $\quad \bar{a}_4 = 42.5288$
$a_4 = -320.1329$

Bild 3.1: Verdrängungsdicke der Testströmung I

Carter gibt allerdings für $\bar{\delta}_1$ an der Stelle x_2 an: " $\bar{\delta}_1(x_2)$ is generally chosen about the same as the Blasius flat-plate value at the particular x location". Für die Vergleichsrechnung wurde gesetzt:

$$\bar{\delta}_1(x_2) = \bar{\delta}_{1\,BLASIUS}(x_2)$$

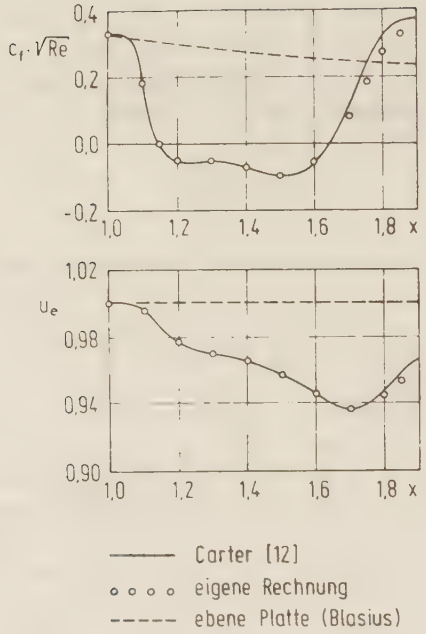


Bild 3.2: Vergleichsrechnung ; Testströmung I

Bild 3.2 zeigt Abweichungen für die Schubspannung und Außengeschwindigkeit, u_e , nur in der Umgebung des Punktes x_2 , die offensichtlich durch eine abweichende Wahl der Funktion $\bar{\delta}_{12}$ in diesem Bereich entsteht.
Eine ähnliche Verteilung ergibt sich mit folgender einfacher $\bar{\delta}_1$-Verteilung für $1{,}25 \leq x \leq 1{,}75$:

$$\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_{1\,\mathrm{BLASIUS}} + \frac{a_1}{4}\left\{\cos 4\pi(x-1.25)-1\right\}^2 \qquad (3.42)$$

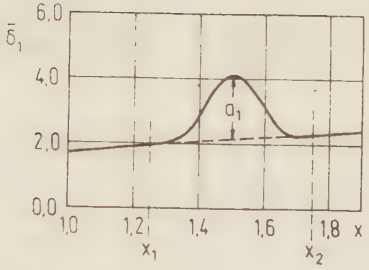


Bild 3.3: Verdrängungsdicke der Testströmung II

Bild 3.3 zeigt den $\bar{\delta}_1$-Verlauf dieser Testströmung II. a_1 ist ein Parameter für die zusätzliche Verdrängungswirkung. $a_1 = 0$ entspricht der Plattenströmung. Die Schubspannungsverteilung für $a_1 > 0$ zeigt Bild 3.4.

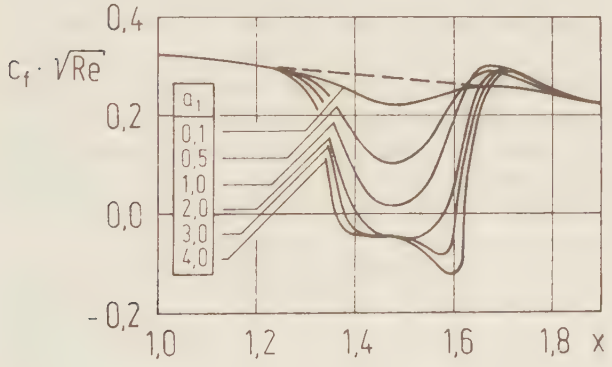


Bild 3.4: Wandschubspannung ; Testströmung II ; a_1 s.Gl.(3.42)

Für Werte $a_1 > 1.2$ tritt Rückströmung auf, wie der doppelte Nulldurchgang der c_f-Verteilung anzeigt. Bild 3.5 zeigt das Stromlinienbild des Rückströmgebietes für $a_1 = 4$.

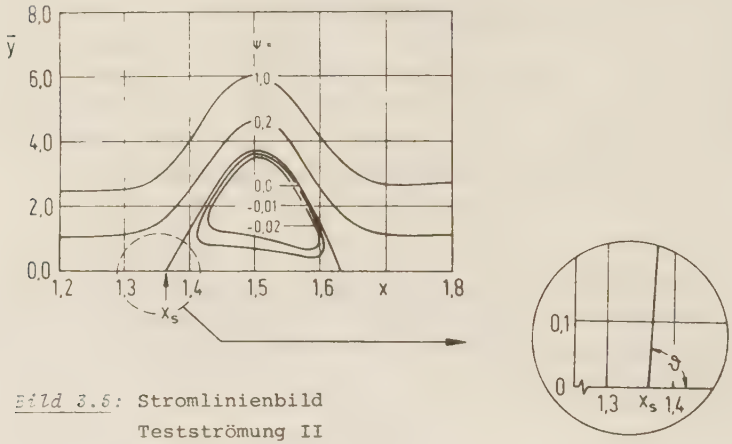


Bild 3.5: Stromlinienbild Testströmung II $a_1 = 4.0$

Es ist deutlich erkennbar, daß die Stromlinie $\Psi = 0$ die Wand an der Stelle x_s unter einem endlichen Winkel ϑ verläßt.
K. Oswatitsch [40] hat aus den Navier-Stokes-Gleichungen folgende Beziehung für diesen Winkel ϑ hergeleitet:

$$\tan \vartheta = -\frac{3\,\partial\tau^*/\partial x^*}{\partial p^*/\partial x^*} \qquad (3.43)$$

die umgeschrieben lautet:

$$\tan \vartheta = \left.\frac{d\bar{y}}{dx}\right|_{\bar{y}=0} = -3\,\frac{d(c_f Re^{1/2})/dx}{dp/dx} \qquad (3.44)$$

Für den in Bild 3.5 berechneten Fall ergibt sich nach Gl. (3.44) ein Winkel $\vartheta = 87°$, der im Rahmen der Ablesegenauigkeit mit dem Wert ϑ aus Bild 3.5 übereinstimmt. Die Übereinstimmung ist zufriedenstellend, obwohl die Rechnung mit der FLARE-Approximation durchgeführt wurde (s.S. 32) und diese die relativ größten Fehler in den Geschwindigkeitsprofilen und damit in der Ψ-Verteilung aufweist (s. Williams [57]).

Benachbarte Lösungen für Strömungen mit $\tau_w = 0$

Direkte und inverse Lösungsmethoden führen für Strömungen mit positiver Wandschubspannung (keine Rückströmgebiete) in folgendem Sinne zur selben Lösung:
Eine vorgegebene Druckverteilung ergibt mit einer direkten Methode eine bestimmte Verdrängungsdickenverteilung. Wird diese als Randbedingung in einer indirekten Methode verwendet, so führt dies auf die ursprünglich vorgegebene Druckverteilung.
Was geschieht bei Strömungen mit $\tau_w \neq 0$? Zur Klärung dieser Frage wird zunächst folgende Modellrechnung durchgeführt:
Die mit der Testströmung II ($\alpha_1 = 4.0$) gewonnene Druckverteilung wird als Randbedingung in ein direktes Grenzschichtverfahren gegeben und dieses so weit wie möglich gerechnet. Bild 3.6 zeigt die Schubspannungsverteilung aus beiden Verfahren.

Abweichungen beider c_f-Verteilungen ergeben sich erst am letzten Aufpunkt vor dem Wert x_o (hier ist $c_f = 0$), also etwa im Abstand der numerischen Schrittweite. Eine Verkleinerung dieser Schrittweite führt zum prinzipiell gleichen Ergebnis.
Es existieren hier also offenbar zwei benachbarte Lösungen, die sich für $x > x_o$ in der Wandschubspannungsverteilung erheb-

lich, in der Druckverteilung dagegen beliebig wenig unterscheiden. Als interessant bleibt festzuhalten, daß die Rechnung nach dem direkten Verfahren nicht auf die Goldstein-Singularität führt, sondern stets zu einer regulären Lösung kommt. Ähnliche Ergebnisse wurden z.B. auch von J.E. Carter [11] und H.P. Horton [26] erzielt.

Bild 3.6:

Wandschubspannung
Testströmung II
direkt/invers($\bar{\delta}_1$ geg.)

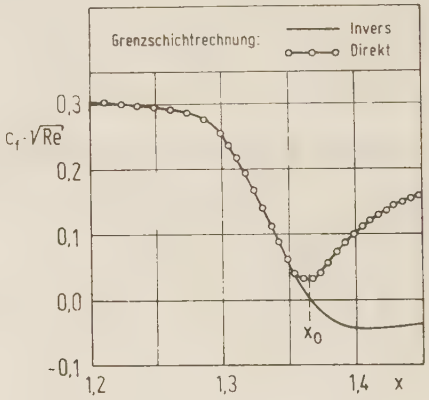
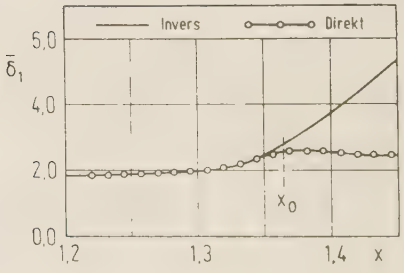


Bild 3.7:

Verdrängungsdicke
Testströmung II
direkt/invers($\bar{\delta}_1$ geg.)



Zu beiden Lösungen gehören natürlich auch deutlich verschiedene Verdrängungsdicken-Verteilungen, wie Bild 3.7 zeigt.

3.2.3. Linearisierte Außenströmung; das Hilbert-Integral

Es soll hier zunächst gezeigt werden, warum die reibungslose und drehungsfreie Strömung in der äußeren Schicht des Triple-Deck, im 'upper deck', durch das Hilbert-Integral, Gl. (3.21) beschrieben werden kann.
Die vollständige Gleichung der Außenströmung ist die Laplace-Gleichung (dimensionslose Variable nach Tabelle 2.1):

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0} \qquad (3.45)$$

mit den Bedingungen:

$$\Psi \sim y + o(1) \quad \text{für} \quad x^2 + y^2 \to \infty \qquad (3.46)$$

$$-\frac{\partial \Psi / \partial x}{\partial \Psi / \partial y} = \frac{v}{u} = \frac{d\,\delta_{1T}}{dx} \quad \text{auf} \quad y = \delta_{1T} \qquad (3.47)$$

Gl. (3.47) stellt sicher, daß die Strömung tangential zur Verdrängungskontur $\delta_{1T} = \delta^*_{1T}/L^*$ verläuft. Für diese Verdrängungskontur gilt nach Gleichung (3.46):

$$\boxed{\delta_{1T} = -\epsilon^5 \lambda^{-3/4} A(X)} \qquad (3.48)$$

so daß die Randbedingung (3.47) jetzt lautet:

$$\boxed{\frac{\partial \Psi / \partial x}{\partial \Psi / \partial y} = \epsilon^2 \lambda^{1/2} \frac{dA}{dX}} \qquad (3.49)$$

Ψ ist als Teil der asymptotischen Gesamtlösung für $Re^{-1} \to 0$ also die Umströmung einer ebenen Wand, die eine kleine Störung aufweist (Die y-Komponente der Wandstörung ist von der Größenordnung $O(Re^{-5/8})$, s. Gl. (3.48)).
Da diese Störung für $Re^{-1} = 0$ identisch verschwindet, ist es sinnvoll, die Stromfunktion Ψ in einer asymptotischen Reihe bezüglich der Störgröße ϵ^2 (s. Gl. (3.49)) zu entwickeln. Der erste Term dieser Entwicklung ist dann die Plattenlösung $\Psi_o = y$.
Mit dem Störparameter

$$\boxed{\mu = \epsilon^2} \qquad (3.50)$$

lautet die Verdrängungskontur: $\delta_{1T} = \mu(-\epsilon^3 \lambda^{-3/4} A(X))$
und die Entwicklung für Ψ:

$$\Psi(x,y,\mu) = \Psi_o(x,y) + \mu \Psi_1(x,y) + \mu^2 \Psi_2(x,y) + O(\mu^3) \qquad (3.51)$$

Diese Entwicklung ist in Gl. (3.45) einzusetzen. Zusätzlich muß die Randbedingung (3.49) auf die Achse y=0 umgeschrieben werden (s. van Dyke [21]). Dies geschieht durch eine Taylorentwicklung von $\partial\Psi/\partial x$ und $\partial\Psi/\partial y$ um y=0 :

$$\frac{\partial \Psi(x,\delta_{1T})}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_o(x,0)}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial \Psi_1(x,0)}{\partial x} - \epsilon^3 \lambda^{-3/4} A \frac{\partial^2 \Psi_o(x,0)}{\partial x\, \partial y} \right] + \mu^2 \left[\frac{\partial \Psi_2(x,0)}{\partial x} - \epsilon^3 \lambda^{-3/4} A \frac{\partial^2 \Psi_1(x,0)}{\partial x\, \partial y} \right] + O(\mu^3)$$

$$\frac{\partial \Psi(x,\delta_{1T})}{\partial y} = \frac{\partial \Psi_o(x,0)}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial \Psi_1(x,0)}{\partial y} - \epsilon^3 \lambda^{-3/4} A \frac{\partial^2 \Psi_o(x,0)}{\partial y^2} \right] + \mu^2 \left[\frac{\partial \Psi_2(x,0)}{\partial y} - \epsilon^3 \lambda^{-3/4} A \frac{\partial^2 \Psi_1(x,0)}{\partial y^2} \right] + O(\mu^3)$$

Das Ordnen nach Potenzen von μ ergibt jetzt:

μ^0 : Plattenströmung

$$\mu^1 : \quad \boxed{\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} = 0} \qquad (3.52)$$

$$\Psi_1 = o(1) \quad \text{für} \quad x^2 + y^2 \to \infty \qquad (3.53)$$

$$\frac{\partial \Psi_1(x,0)}{\partial x} = \lambda^{1/2} \frac{dA}{dX} \qquad (3.54)$$

μ^2 : ...

⋮

Ein Vergleich mit der Entwicklung im 'upper deck', Gl. (3.9), zeigt, daß die ersten beiden Glieder der Entwicklung (3.51) der Lösung im 'upper deck' bis zur Ordnung ϵ^2 entsprechen. So gilt etwa für die u-Komponente der Geschwindigkeit nach Gl. (3.51):

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 1 + \epsilon^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + o(\epsilon^2)$$

Gleichung (3.52) kann mit Hilfe der Singularitätenmethode gelöst werden, was in diesem Fall bedeutet, daß die Wand mit einer Quell-, Senken-Verteilung belegt ist. Die Induktion dieser Singularitätenverteilung führt zu (Biot-Savartsches Gesetz):

$$\boxed{\frac{\partial \Psi_1(x,0)}{\partial y} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi_1(\bar{x},0)/\partial \bar{x}}{x - \bar{x}} \, d\bar{x}} \qquad (3.55)$$

mit Gl. (3.54) und der Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{p^* - p_\infty}{\rho U_\infty^2} = -\epsilon^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + o(\epsilon^2) \qquad (3.56)$$

gilt in Triple-Deck-Koordinaten (s. Tabelle 3.3) somit Gleichung (3.21):

$$P = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dA/d\bar{X}}{X - \bar{X}} \, d\bar{X} \qquad (3.57)$$

Der Integrand von Gleichung (3.21) ist für $X=\bar{X}$ singulär. Mit $\oint$ ist der Cauchy'sche Hauptwert dieses Integrals gemeint, der im weiteren aber wieder mit dem einfachen Integral-Symbol bezeichnet wird.
Die numerische Lösung, besonders die Behandlung der Singularität in Gl. (3.21) ist in Kap. 3.4.2 beschrieben.

3.3. Wechselwirkung ohne Triple-Deck

Die Wechselwirkung zwischen Grenzschicht und Außenströmung kann auch ohne die Triple-Deck-Theorie erfaßt werden. Das Verfahren wurde bereits von L. Prandtl vorgeschlagen:
Die Potentialströmung um den Körper liefert mit Hilfe der Grenzschichtrechnung eine Verdrängungsdicken-Verteilung. Diese kann der Körpergeometrie hinzugefügt werden. Es entsteht damit eine fiktive Körpergeometrie, zu der wieder eine Potential-Außenströmung existiert, die dann über eine erneute Grenzschichtrechnung zu einer neuen Verdrängungsdicken-Verteilung führt. Dieser Zyklus ist zu wiederholen, bis die Differenz zweier aufeinander folgender Verdrängungsdicken-Verteilungen kleiner als eine vorgegebene Schranke ist.
Unter der Voraussetzung, daß es sich um eine kleine Störung (Außenströmung linearisiert) der Plattengrenzschicht handelt,

lautet die mathematische Formulierung damit:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial u}{\partial \bar{y}} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2} \qquad (3.58)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \qquad (3.59)$$

$$x \to -\infty : \quad u \to u_\infty \qquad (3.60)$$

$$\bar{y} = 0 : \quad u = v = 0 \qquad (3.61)$$

$$\bar{y} \to \infty : \quad u - 1 \to -p(x) \qquad (3.62)$$

$$p(x) = -\frac{1}{\pi} Re^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{\Delta}/d\bar{x}}{x - \bar{x}}\, d\bar{x} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{d\bar{\Delta}}{dx} = \frac{1}{\pi} Re^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\bar{x})}{x - \bar{x}}\, d\bar{x} \qquad (3.63)$$

Die dimensionslosen Größen sind folgender Tabelle zu entnehmen. u_∞ ist das ungestörte Profil (z.B. das Blasius-Profil).

x^*	y^*	u^*	v^*	p^*	Δ^*
$x = \frac{x^*}{L^*}$	$\bar{y} = \frac{y^*}{L^*} Re^{1/2}$	$u = \frac{u^*}{U_\infty}$	$\bar{v} = \frac{v^*}{U_\infty} Re^{1/2}$	$p = \frac{p^* - p_\infty}{\rho U_\infty^2}$	$\bar{\Delta} = \frac{\Delta^*}{L^*} Re^{1/2}$

Tabelle 3.5: Dimensionslose Größen

zu Randbedingung (3.62):
Schreibt man für die Außenströmung $U(x) = 1 + \Delta U(x)$, so ist ΔU die Abweichung auf Grund der gestörten Plattengrenzschicht, wobei gilt $p = -\Delta U - (\Delta U)^2/2$. Im Rahmen der linearisierten Theorie für die Außenströmung steht (3.62) für $u \to 1 + \Delta U$.

zu Randbedingung (3.63):

Die Druckverteilung ergibt sich als Potentialdruckverteilung über der fiktiven Körpergeometrie. Es sei hier zunächst als reale Körpergeometrie die ebene Platte gewählt (für die Dellengeometrie s. Kap. 4.3.1), so daß die fiktive Körpergeometrie durch die Verdrängungsfunktion (zu der Platte $y\equiv 0$ hinzuaddiert) gegeben ist. Diese besteht aus den Anteilen $\delta_{1,BL}=\delta^*_{1,BL}/l^*$ und $\Delta=\Delta^*/l^*$. $\delta_{1,BL}$ ist die Verdrängungsfunktion der ebenen Platte, Δ die zusätzliche Verdrängung auf Grund einer Störung. Im Rahmen der linearisierten Theorie gilt mit der Verdrängungskontur

$$y_{VK} \equiv \delta_{1,BL} + \Delta \qquad (3.64)$$

für die Druckverteilung $p(x)$ also:

$$p(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_{VK}/d\bar{x}}{x-\bar{x}}\,d\bar{x} = \underbrace{-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta_{1,BL}/d\bar{x}}{x-\bar{x}}\,d\bar{x}}_{p_{BL}} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta/d\bar{x}}{x-\bar{x}}\,d\bar{x} \qquad (3.65$$

Der Verdrängungskörper der ungestörten Plattenströmung ist ein halbunendlicher, parabolischer Zylinder, für den im Rahmen der linearisierten Theorie $U(x)=1$ gilt (s. van Dyke [21]), so daß

$$p_{BL}(x) = 0 \qquad (3.66)$$

Gleichung (3.65) umgeschrieben in Grenzschichtvariable, führt somit auf Gl. (3.63).

Grenzschichten mit Rückströmgebieten sind selbstverständlich mit einem inversen Grenzschichtverfahren zu rechnen.

Aus den Gleichungen (3.58), (3.59), (3.63) zusammen mit (3.62) sind die vier Funktionen u, v, p und Δ analog zu der in Kap.

3.2.1 beschriebenen Vorgehensweise zu bestimmen. Es wird von hier ab für das eben beschriebene Verfahren der Begriff 'wechselwirkende Grenzschichten' ('interacting-boundary-layers') verwendet werden, abgekürzt WWG.
Ein Vergleich zwischen den Gleichungen (3.16)-(3.20) und (3.58)-(3.63) zeigt den Unterschied zwischen der Triple-Deck-Theorie und der WWG-Theorie. Wesentliche Punkte sind:

(1) Die Triple-Deck-Theorie ist eine asymptotische ($Re^{-1} \to 0$) Wechselwirkungstheorie, die deshalb den Parameter Re-Zahl nicht mehr explizit enthält. Im Gegensatz dazu erfordert die Theorie wechselwirkender Grenzschichten für jede Rechnung die Vorgabe einer Re-Zahl, wie aus Gl. (3.63) zu ersehen ist, es handelt sich also in diesem Sinne um eine Theorie für endliche Re-Zahlen.

(2) In der WWG-Theorie werden die Grenzschichtgleichungen für die gesamte Grenzschicht gelöst, was damit auch das gesamte Blasius-Profil als Anfangsbedingung erfordert. Im Gegensatz dazu löst die Triple-Deck-Theorie die Grenzschichtgleichungen nur im wandnahen Bereich und benötigt somit auch nur den wandnahen Bereich der Blasius-Lösung als Anfangsbedingung (s. Gleichung (3.60) bzw. Gl. (3.18)).

(3) Für $Re^{-1} \to 0$ geht die in Gleichung (3.22) beschriebene, im Triple-Deck erzeugte, zusätzliche Verdrängungsdicke $\bar{\delta}_{1T}$ über in $\bar{\Delta}$ aus der WWG-Theorie, so daß folgender Zusammenhang zwischen A(X), Gl. (3.21) und $\bar{\Delta}$, Gl. (3.63) besteht:

$$\boxed{\bar{\Delta} \sim \bar{\delta}_{1T} = -Re^{-1/8} \lambda^{-3/4} A(X)} \qquad (3.67)$$

3.4. Numerische Aspekte

3.4.1. Inverses Grenzschichtverfahren

Die numerische Lösung erfolgt, ausgehend von den Gleichungen (3.35), in drei Schritten:

- Übergang von den Differentialgleichungen zu Differenzengleichungen
- Aufstellen der Lösungsmatrix
- Lösung des linearen Gleichungssystems.

Differential- → Differenzengleichungen:

Zur Diskretisierung der Differentialgleichungen wird hier die sog. 'box scheme method' verwendet (vgl. dazu z.B. H.B. Keller [30]). Dabei handelt es sich um ein sehr übersichtliches Verfahren, das sich in einer Reihe von Anwendungen hervorragend bewährt hat (s. auch T. Cebeci, P. Bradshaw [14]). Es ist ein in Normalen-Richtung implizites Verfahren mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung (Fehler von der Größenordnung $O(h^2)$; $h \hat{=}$ Schrittweite), das uneingeschränkt stabil ist.
Bild 3.8 skizziert einen diskretisierten Lösungsbereich. Die Rechnung erfolgt in Strömungsrichtung, da es sich um ein parabolisches Gleichungssystem handelt.
Für einen allgemeinen Funktionswert $f(x,\tilde{y})$ gilt dann:

Aufpunkt bei Ⓘ:

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} = \frac{\left[f_j^n - f_{j-1}^n\right] + \left[f_j^{n-1} - f_{j-1}^{n-1}\right]}{2\left[\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1}\right]} \tag{3.68}$$

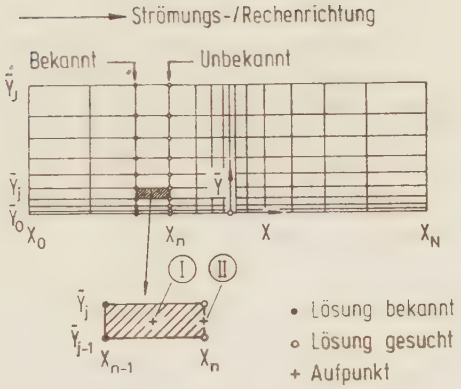
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\left[f_j^n + f_{j-1}^n\right] - \left[f_j^{n-1} + f_{j-1}^{n-1}\right]}{2\left[x_n - x_{n-1}\right]} \tag{3.69}$$

Aufpunkt bei Ⓘ:

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} = \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1}} \tag{3.70}$$

Bild 3.8:

Diskretisierung nach der 'box scheme method'



Mit Hilfe der Gl. (3.68)-(3.70) erhält man bei x_n für (J+1) Knotenpunkte 4·J Gleichungen, die zusammen mit 4 Randbedingungen ein Bestimmungssystem für die 4(J+1) Größen:

$$\left\{ \Psi_j^n \;,\; U_j^n \;,\; p_j^n \;,\; T_j^n \right\} \qquad j=0,1,\ldots J \tag{3.71}$$

darstellen. Dabei handelt es sich zunächst um nichtlineare, algebraische Gleichungen, die mit Hilfe der Newton-Methode linearisiert werden. Dazu werden die gesuchten Größen f_j^n in einem Iterationsprozeß wie folgt bestimmt:
Mit dem Iterationszähler i wird geschrieben:

$$\boxed{\left(f_j^n\right)^{i+1} = \left(f_j^n\right)^i + \left(df_j^n\right)^i} \tag{3.72}$$

Die nichtlinearen Bestimmungsgleichungen für (3.71) werden gemäß (3.72) umgeschrieben. Im Iterationsschritt (i+1) handelt es sich dann um lineare Gleichungen, wenn alle nichtlinearen Terme von $(df_j^n)^i$ vernachlässigt werden. Im nächsten Iterationsschritt wird $(f_j^n)^i$ ersetzt durch $(f_j^n)^{i+1}$. Eine befriedigende Konvergenz ist in der Regel nach 2-3 Iterationsschritten erreicht.
Es gilt damit für eine Knotenstelle (n,j) beim Iterationsschritt i der Newton-Iteration:

$$\boxed{S_j^i \underset{\sim}{\delta}_j^i - L_j^i \underset{\sim}{\delta}_{j-1}^i = \underset{\sim}{m}_*^i \quad ; 1 \le j \le J} \tag{3.73}$$

Dabei steht der Index * für $j-\frac{1}{2}$ und bezeichnet die Lage des Aufpunktes zwischen j und j-1 (s. Bild 3.8). '~' bezeichnet eindimensionale Vektoren, und zwar:

$$\underset{\sim}{\delta}_j^i = \begin{bmatrix} \delta\Psi_j^i \\ \delta U_j^i \\ \delta p_j^i \\ \delta T_j^i \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\delta}_{j-1}^i = \begin{bmatrix} \delta\Psi_{j-1}^i \\ \delta U_{j-1}^i \\ \delta p_{j-1}^i \\ \delta T_{j-1}^i \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{m}_*^i = \begin{bmatrix} r_*^i \\ s_*^i \\ t_*^i \\ w_*^i \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

wobei gilt:

$$\left.\begin{aligned}
r_*^i &= \Psi_{j-1}^i - \Psi_j^i + \frac{h_j}{2}\left[U_j^i + U_{j-1}^i\right] \\
s_*^i &= U_{j-1}^i - U_j^i + \frac{h_j}{2}\left[T_j^i + T_{j-1}^i\right] \\
t_*^i &= p_{j-1}^i - p_j^i \\
w_*^i &= -h_j^{-1}\left[T_j^i - T_{j-1}^i\right] - f l_j^{-1}\left[T_*^i \Psi_*^i + T_*^{n-1}\Psi_*^i - \Theta U_*^{i\,2} - T_*^i \Psi_*^{n-1}\right] \\
&\quad - \Theta f_x U_*^{i\,2} + f^3 2\alpha\left[p_*^i - p_*^{n-1}\right] \\
&\quad - h_j^{-1}\left[T_j^{n-1} - T_{j-1}^{n-1}\right] + f l_j^{-1}\left[T_*^{n-1}\Psi_*^{n-1} - \Theta(U_*^2)^{n-1}\right] - \Theta f_x (U_*^2)^{n-1}
\end{aligned}\right\} \tag{3.75}$$

mit: $h_j = y_j - y_{j-1}$; $l_j = x_n - x_{n-1}$; f nach Gl. (3.29)
und den Matrizen:

$$S_j = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{h_j}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_j^i & b_j^i & c_j^i & d_j^i \end{bmatrix} \qquad L_j = \begin{bmatrix} 1 & \frac{h_j}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{h_j}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{a}_j^i & \bar{b}_j^i & \bar{c}_j^i & \bar{d}_j^i \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

mit:

$$\left.\begin{aligned} a_j^i &= -\bar{a}_j^i = \frac{f}{2 l_j}\left[T_*^i + T_*^{n-1} \right] \\ b_j^i &= -\bar{b}_j^i = \frac{f}{2 l_j}\left[-2\Theta U_*^i \right] + f_x \Theta U_*^i \\ c_j^i &= -\bar{c}_j^i = -f^3 l_j^{-1} \\ d_j^i &= -\bar{d}_j^i + 2 h_j^{-1} = h^{-1} - \frac{f}{2 l_j}\left[\Psi_*^i - \Psi_*^{n-1} \right] \end{aligned}\right\} \tag{3.77}$$

Aufstellen der Lösungsmatrix:

Da es sich um ein implizites Verfahren handelt, sind die 4(J+1) linearen Gleichungen simultan zu lösen.
Das gesamte Gleichungssystem lautet:

$$\boxed{\mathbb{A}^i \cdot \underset{\approx}{\delta}^i = \underset{\approx}{q}^i} \tag{3.78}$$

mit:

$$\underset{\approx}{\delta}^i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\delta_0^i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{\delta_J^i} \end{bmatrix} \qquad \underset{\approx}{q}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{1/2}^i \\ \vdots \\ m_{J-1/2}^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

$\underset{\approx}{\delta}_1^i$ und $m_{j-\frac{1}{2}}^i$ nach Gl. (3.74) und der Koeffizientenmatrix:

$$\mathbb{A}^i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & -0- \\ & -L_1 S_1 & \\ & & \ddots \\ & & -L_J S_J \\ -0- & & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad (3.80)$$

L_j und S_j nach Gleichung (3.76). Die ersten und letzten beiden Zeilen entsprechen den Randbedingungen. Die '0'-Werte in $\underset{\approx}{q}^i$ gelten für homogene Randbedingungen.
Die Matrix (3.80) hat eine sog. Block-tridiagonale Struktur der Form:

$$\mathbb{A}^i = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & -0- \\ & B_j^i & A_j^i & C_j^i \\ -0- & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \qquad (3.81)$$

A_j^i , B_j^i , C_j^i sind dabei (4x4)-Untermatrizen. Diese lauten, nachdem das Gleichungssystem so umgeformt wurde, daß die Hauptdiagonale von $\mathbb{A}^i$ durchweg inhomogen ist:

$$A_0^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{h_1}{2} \end{bmatrix} \quad A_j^i = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0 \\ a_j^i & b_j^i & c_j^i & d_j^i \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{h_{j+1}}{2} \end{bmatrix} \quad A_J^i = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_J}{2} & 0 & 0 \\ a_J^i & b_J^i & c_J^i & d_J^i \\ 1 & e_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+e_2 & 1 & -\frac{h_J}{2} \end{bmatrix}$$

$$0 < j < J$$

$$B_j = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0 \\ -\bar{a}_j^i & -\bar{b}_j^i & -\bar{c}_j^i & -\bar{d}_j^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{h_{j+1}}{2} \end{bmatrix} \qquad B_J = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{h_J}{2} & 0 & 0 \\ -\bar{a}_J^i & -\bar{b}_J^i & -\bar{c}_J^i & -\bar{d}_J^i \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{h_J}{2} \end{bmatrix}$$

$0 \le j < J \qquad\qquad 0 \le j \le J$

$$e_1 = -\tilde{y}_2 + \delta_1/f \quad ; \quad e_2 = 2\,U_J^i\,(\alpha_1 - \alpha_2) \tag{3.82}$$

$$\alpha_1 = \frac{f_n^{-2} + f_{n-1}^{-2}}{4}$$

$$\alpha_2 = -\frac{x_n - x_{n-1}}{4}\left[\frac{f_{n,x}}{f_n^3} + \frac{f_{n-1,x}}{f_{n-1}^3}\right]$$

Lösung des linearen Gleichungssystems:

Das vorliegende Gleichungssystem kann mit einem sehr effektiven Verfahren gelöst werden, wenn die spezielle Matrixstruktur berücksichtigt wird, dem sog. Block-Eliminations-Verfahren. Entsprechend der z.B. von H.B. Keller & T. Cebeci [31] für (3x3)-Untermatrizen vorgestellten Methode wurde hier ein Eliminationsverfahren für (4x4)-Untermatrizen entwickelt. Auf Einzelheiten dieses in der Entwicklung recht aufwendigen, aber in der Anwendung höchst effektiven Verfahrens soll an dieser Stelle verzichtet werden; bezüglich der Prinzipien sei auf die oben zitierte Arbeit verwiesen.
Eine im direkten Vergleich zur einfachen Gauss-Eliminationsmethode durchgeführte Rechnung zeigt, daß die Block-Elimina-

tionsmethode (für diesen speziellen Testfall) eine Verminderung der Rechenzeit zur Lösung des Gleichungssystems um den Faktor 70 (CPU-Zeit) ergibt.

3.4.2. Das Hilbert-Integral

Bei der numerischen Lösung von Gleichung (3.21)

$$\frac{dA}{d\bar{X}} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\bar{X})}{\bar{X}-\bar{\bar{X}}}\,d\bar{\bar{X}} \qquad (3.83)$$

sind zwei Punkte besonders zu beachten:

- die Verwendung eines endlichen Integrationsbereiches $[\bar{X}_L,\bar{X}_R]$ für die numerische Integration.
- die Beseitigung der Singularität für $\bar{\bar{X}}=\bar{X}$.

Endlicher Integrationsbereich

Da die numerische Integration mit endlichen Schrittweiten erfolgen soll, muß das Integral (3.83) außerhalb des Intervalls $[\bar{X}_L,\bar{X}_R]$ durch einen analytischen Näherungsausdruck ersetzt werden.
Für $|\bar{X}|\to\infty$ gilt für die Druckverteilung $P(\bar{X})$:

$$P(\bar{X}) \approx |\bar{X}|^{-2} \qquad (3.84)$$

Dies ist der asymptotische Druckverlauf einer Einzelquelle für $|\bar{X}|\to\infty$. Hierfür kann die Quell-, Senkenverteilung im Dellenbereich ersatzweise als Einzelquelle, -senke interpretiert werden.
Damit gilt für den Druckverlauf näherungsweise:

$$\bar{X} \le \bar{X}_L < 0 : \qquad P(\bar{X}) = P(\bar{X}_L)\ |\bar{X}_L|^2/|\bar{X}|^2 \tag{3.85}$$

$$\bar{X} \ge \bar{X}_R > 0 : \qquad P(\bar{X}) = P(\bar{X}_R)\ |\bar{X}_R|^2/|\bar{X}|^2 \tag{3.86}$$

und für die analytischen Teile des Integrals (3.83)

$$\int_{-\infty}^{\bar{X}_L} \frac{P(\bar{X})}{X-\bar{X}}\, d\bar{X} = -P(\bar{X}_L)\,\bar{X}_L^2\left[\frac{1}{X\,\bar{X}_L} + \frac{1}{X^2}\ln\left(1-\frac{X}{\bar{X}_L}\right)\right] \tag{3.87}$$

$$\int_{\bar{X}_R}^{\infty} \frac{P(\bar{X})}{X-\bar{X}}\, d\bar{X} = P(\bar{X}_R)\,\bar{X}_R^2\left[\frac{1}{X\,\bar{X}_R} + \frac{1}{X^2}\ln\left(1-\frac{X}{\bar{X}_R}\right)\right] \tag{3.88}$$

für $X \neq 0$. Für den Sonderfall $X=0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\bar{X}_L} \frac{P(\bar{X})}{X-\bar{X}}\, d\bar{X} = \frac{P(\bar{X}_L)}{2} \qquad \int_{\bar{X}_R}^{\infty} \frac{P(\bar{X})}{X-\bar{X}}\, d\bar{X} = -\frac{P(\bar{X}_R)}{2} \tag{3.89}$$

Im Intervall $[\bar{X}_L, \bar{X}_R]$ erfolgt die numerische Integration mit Standard-Verfahren (z.B. Simpson-Verf.), nachdem die Singularität des Integranden beseitigt ist.

Beseitigung der Singularität

Gesucht ist der Cauchysche Hauptwert des Integrals (3.83), also:

$$\lim_{\mu \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{X-\mu} \frac{P(\bar{X})}{X-\bar{X}}\, d\bar{X} + \int_{X+\mu}^{\infty} \frac{P(\bar{X})}{X-\bar{X}}\, d\bar{X} \right\} \tag{3.90}$$

Die Singularität ist zu beseitigen, indem eine integrierbare Funktion mit gleichem Singularitätsverhalten subtrahiert wird. Diese Funktion ist im vorliegenden Fall das sog.

'Glauert-Integral':

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi - \cos\varphi'} d\varphi' = -\pi \qquad (3.91)$$

Da die singuläre Stelle bei X durch das Intervall $[\bar{X}_L, \bar{X}_R]$ 'wandert', wird folgendermaßen verfahren:
Das Glauert-Integral wird aus dem Bereich $[0, \pi]$ auf $[0, 3\Delta\bar{X}]$ abgebildet. In diesem Intervall $[0, 3\Delta\bar{X}]$ wird die Glauert-Funktion, Gl. (3.91), vom ursprünglichen Integranden subtrahiert. Dieses 'Glauert-Intervall' ist also ein Untergebiet des Intervalls $[\bar{X}_L, \bar{X}_R]$, wie dies im Bild 3.9 angedeutet ist.

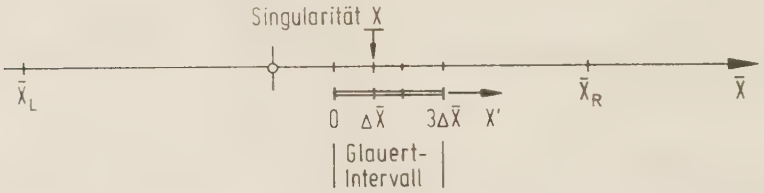


Bild 3.9: Glauert-Intervall

$\Delta\bar{X}$ ist die (äquidistante) Schrittweite im Intervall $[\bar{X}_L, \bar{X}_R]$. Das Intervall $[0, 3\Delta\bar{X}]$ wird getrennt für sich im Koordinatensystem X' (s. Bild 3.9) betrachtet. Die Singularität liegt in diesem Intervall stets an der Stelle $X' = \Delta\bar{X}$, so daß für das Glauert-Integral jetzt gilt:

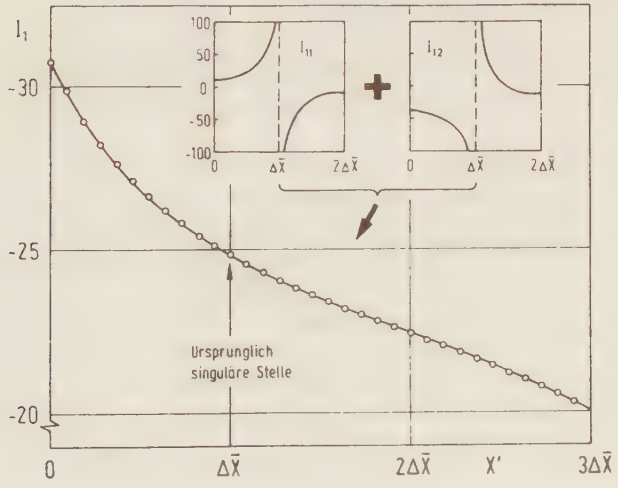
$$\int_0^{3\Delta\bar{X}} \frac{\cos a X'}{\sqrt{2} - \cos a X'} dX' = -\frac{\pi}{a} \quad ; \; a = \frac{\pi}{3\Delta\bar{X}} \qquad (3.92)$$

Dieses Integral im Intervall $[\,0,3\Delta\bar{X}\,]$ subtrahiert (und gleichzeitig als $(-\frac{\pi}{a})$ wieder addiert), ergibt also:

$$\int_0^{3\Delta\bar{X}} I\,dX' = \int_0^{3\Delta\bar{X}} \left\{ I + \mathrm{sgn}[P(X)] \frac{\alpha \cos a X'}{1/2 - \cos a X'} \right\} dX' + \mathrm{sgn}[P(X)] \left(\frac{\alpha \pi}{a}\right)$$

$$I = \frac{P(X' + [\,X - \Delta\bar{X}\,])}{\Delta\bar{X} - X'}$$

α ist dabei ein Faktor, der die ursprüngliche und die Glauert-Singularität zahlenmäßig aneinander anpaßt. Dies kann z.B. geschehen, indem die Funktionswerte am letzten Aufpunkt vor der Singularität betragsmäßig gleichgesetzt werden.
Der neu entstandene, nicht singuläre Integrand kann jetzt wieder mit Standard-Methoden integriert werden. Bild 3.10 zeigt einen solchen Integranden als Beispiel.



$$I_1 = \underbrace{\frac{P(X' + [X - \Delta\bar{X}])}{\Delta\bar{X} - X'}}_{I_{11}} + \underbrace{\mathrm{sgn}[P(X)] \frac{\alpha \cos a X'}{\frac{1}{2} - \cos a X'}}_{I_{12}} ;$$

$\alpha = 20{,}70$
$a = 104{,}72$

Bild 3.10: Beispiel eines Integranden von Gl.(3.21) nach Beseitigung der Singularität

4. Grenzschichten mit Rückströmung

Die in diesem Kapitel behandelten Strömungen sind dadurch gekennzeichnet, daß vorhandene Rückströmgebiete stets in der Größenordnung der Grenzschichtabmessungen bleiben. Wird das Rückströmgebiet durch die Wandgeometrie (Delle) erzeugt, so muß aus diesem Grunde für Querabmessungen der Delle (s. Bild 2.2) ebenfalls gelten: $O(H^*/L^*) \leq O(Re^{-1/2})$.
Kap. 4 behandelt folgenden Grenzfall:

$$\boxed{\begin{aligned} Re^{-1} &= \frac{\nu}{U_\infty L^*} \to 0 \\ \varkappa^{-1} &= \frac{H^*}{\delta^*} \to 0 \end{aligned}} \qquad (4.1)$$

Zur Definition von $\varkappa$ s. Gl. (2.15).
Wie in Kap. 2.2 bereits ausgeführt wurde, kann die Goldstein-Singularität nicht beseitigt, sondern nur vermieden werden. Dies geschieht für die durch (4.1) beschriebene Strömung folgendermaßen:
Die Rückströmung erzeugende Dellengeometrie ist eine Funktion der Re-Zahl und 'entartet' im Grenzfall $Re^{-1}=0$ (nur für diesen Grenzfall existiert die Goldstein-Singularität) zur ebenen Platte, so daß Rückströmung und Nulldurchgang der Wandschubspannung für diesen Grenzfall nicht existieren.
Obwohl es sich um eine asymptotische Theorie ($Re^{-1}\to 0$) handelt, ist also die physikalische Interpretation als Grenzschicht mit Rückströmung nur für endliche Re-Zahlen sinnvoll.

4.1. Asymptotische Wechselwirkungstheorie; Triple-Deck-Theorie

4.1.1. Anwendung der Triple-Deck-Theorie auf die Dellenströmung

Die Kopplung der Dellengeometrie mit der Re-Zahl muß im Rahmen der Triple-Deck-Theorie so erfolgen, daß Dellentiefe und -länge in Triple-Deck-Koordinaten von der Größenordnung O(1) sind. Deshalb werden folgende Größen eingeführt (vgl. Tab. 3.1):

$$H_T \equiv \frac{H^* \lambda^{3/4}}{L^* \epsilon^5} = O(1) \tag{4.2}$$

$$l_T \equiv \frac{l^* \lambda^{5/4}}{L^* \epsilon^3} = O(1) \tag{4.3}$$

Als Dellenform $Y_K(X)$ wird analog zu Gl. (2.8) gewählt:

$$\frac{Y_K}{H_T} = -\frac{1}{4}\left\{\cos 2\pi\left[\frac{X}{l_T} + \frac{1}{2}\right] - 1\right\}^2 \quad ; \quad -\frac{l_T}{2} \le X \le \frac{l_T}{2} \tag{4.4}$$

Bild 4.1 zeigt die Modellgeometrie in Triple-Deck-Koordinaten.

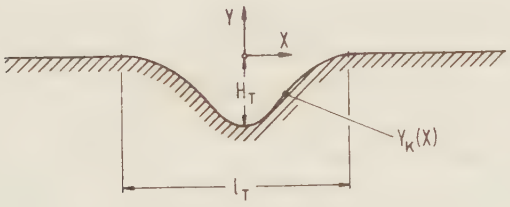


Bild 4.1: Modellgeometrie in Triple-Deck-Koordinaten

Aufgrund der Re-Zahl-Abhängigkeit der Koordinaten stellt Gl. (4.4) für verschiedene Re-Zahlen verschiedene Geometrien in physikalischen Variablen dar.
Folgender Zusammenhang gilt zwischen den Geometrien in Triple-Deck-Koordinaten (X,Y) und physikalischen Koordinaten (x^*,y^*):

Relative Dellentiefe:

$$\frac{H^*}{l^*} = \frac{H_T}{l_T}\,\varepsilon^2\,\lambda^{4/2} = O(Re^{-1/4}) \qquad (4.5)$$

1. Konturableitung:

$$\frac{dy_K^*}{dx^*} = \frac{dY_K}{dX}\,\varepsilon^2\,\lambda^{4/2} = O(Re^{-4/4}) \qquad (4.6)$$

2. Konturableitung:

$$\frac{d^2y_K^*}{dx^{*2}} = \frac{1}{l^*}\,\frac{d^2Y_K}{dX^2}\,\varepsilon^{-1}\,\lambda^{7/4} = O(Re^{1/8}) \qquad (4.7)$$

Auf die Bedeutung des positiven Re-Exponenten in Gl. (4.7) wird an späterer Stelle, Kap. 4.3.1, eingegangen.

Eine einzige Lösung in Triple-Deck-Koordinaten beschreibt in physikalischen Koordinaten also eine unendlich große Anzahl von Strömungen über jeweils verschiedene Dellen, die mit wachsender Re-Zahl:

- kürzer werden; $l^* \approx Re^{-3/8}$
- flacher werden; $H^* \approx Re^{-5/8}$
- kleinere relative Tiefe haben; $H^*/l^* \approx Re^{-1/4}$
- kleinere örtliche Krümmungsradien haben; $r^* \approx Re^{-1/8}$

Eine anschauliche Vorstellung, wie mit wachsender Re-Zahl die Dellengeometrie und das Lösungsgebiet der Triple-Deck-Gleichungen (s. dazu Tabelle 3.1) verändert werden, kann Bild 4.2 geben. Dort ist jede Schicht durch eine Fläche der Länge und Breite '1' im entsprechenden Koordinatensystem repräsentiert.

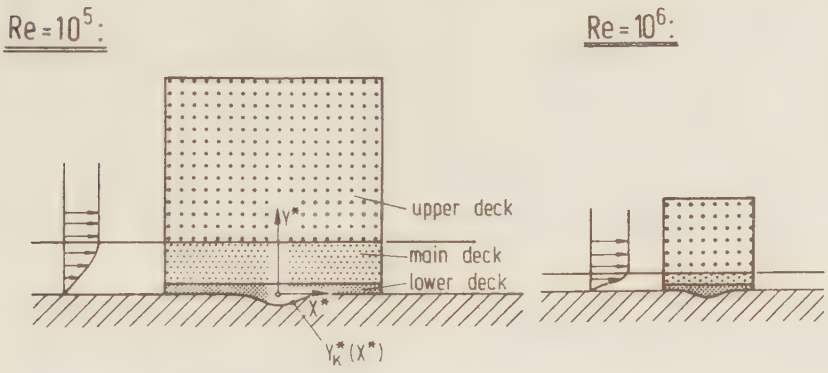


Bild 4.2: Lösungsgebiete der Triple-Deck-Theorie

Tabelle 4.1 enthält einige Zahlenwerte für das Beispiel $l_T = 2.0$, $H_T = 3.0$

In Kapitel 2.3.4 wurden mit den Gl. (2.9), (2.13) und (2.14) die drei unabhängigen Parameter angegeben, die für eine gegebene Konturform die Gesamtheit aller Lösungen umfassen. Die Triple-Deck-Theorie als asymptotische Wechselwirkungstheorie reduziert die Anzahl der Parameter um eins (die Re-Zahl ist kein Parameter mehr), so daß die Gesamtheit aller Lösungen in einem zwei-Parameter Feld darstellbar ist.

Tabelle 4.1:

Dellengeometrie nach Gl.(4.4) in physikalischen Variablen

$l_T = 2.0 \quad H_T = 3.0$

$\lambda = 0.332$

Re	ϵ	l^*/L^*	H^*/L^*	H^*/l^*
	⋮	⋮	⋮	⋮
10^4	0,316	0,251	0,0217	0,086
10^5	0,237	0,106	0,0051	0,049
10^6	0,178	0,045	0,0012	0,027
	⋮	⋮	⋮	⋮

Analog zu (2.13), (2.14) werden als die zwei verbleibenden Parameter gewählt:

$$\varkappa_1 \equiv \frac{H^*}{l^*} Re^{1/4} \lambda^{-1/2} = \frac{H_T}{l_T} \qquad (4.8)$$

$$\varkappa_2 \equiv \frac{L^*}{l^*} Re^{-3/8} \lambda^{-5/4} = \frac{1}{l_T} \qquad (4.9)$$

Das bereits in Kap. 3.2 vorgestellte Lösungsschema der Triple-Deck-Gleichungen ist in Bild 4.3 noch einmal erläutert. Es ist dort der Iterationsprozeß angedeutet, der nötig ist, um nach N Iterationsschritten die Funktionen $A_N(X)$ und $P_N(X)$ so zu bestimmen, daß das Gleichungssystem (3.16)-(3.21) erfüllt ist.

Im folgenden sollen Besonderheiten, die bei der Anwendung auf die Dellengeometrie entstehen, behandelt werden:

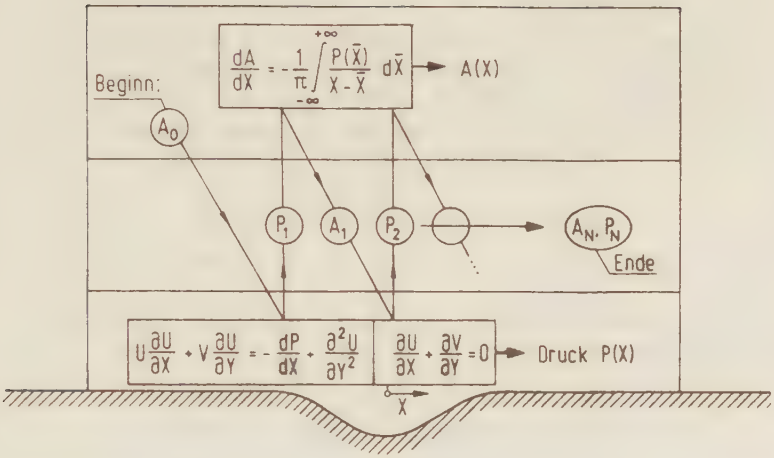


Bild 4.3: Iterationsschema zur Lösung der Triple-Deck-Gleichungen

Lösung der inversen Grenzschichtgleichungen

Die Stromfunktion im Triple-Deck lautet in Ergänzung zu Tabelle 3.3

$$\Psi = \frac{\lambda^{1/2}}{U_\infty L^* \epsilon^6}\,\Psi^* \qquad (4.10)$$

Für die Anwendung des in Kap. 3.2.2 entwickelten inversen Grenzschichtprogramms im Triple-Deck-System sind drei Punkte von besonderer Bedeutung:

(1) Koordinatensystem

Das Grenzschichtkoordinatensystem folgt der Wandkontur, wenn die Querkoordinate Y (s. Bild 4.1) um Y_K verschoben wird (mit F(X) analog zu (3.29) als später zu spezifizierender Streckungsfunktion). Es handelt sich also um die Transformation:

$$(X,\tilde{Y}) \longrightarrow (X,H) \qquad \boxed{H=\frac{Y-Y_K}{F(X)}} \qquad (4.11)$$

Gl.(3.30) bleibt unter dieser Transformation im wesentlichen erhalten und lautet jetzt ($' \hat{=} \partial/\partial H$):

$$\boxed{\Psi'''-F^3\frac{dP}{dX}=F\left[\Theta\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial X}-\Psi''\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right]-\Theta\frac{dF}{dX}\Psi'^2} \qquad (4.12)$$

Bild 4.4 zeigt das Koordinatensystem (X,H) für die beiden Fälle $F\equiv 1$ und $F=1-Y_K(X)/Y_o$. Y_o ist dabei der obere Rand des Lösungsgebietes.
Verwendet man statt des $(X,\tilde{Y})$ bzw. (X,H)-Systems ein Koordinatensystem, das als orthogonales Koordinaten-Netz der Körperkontur angepaßt ist ('curvilinear coordinates', s. H. Schlichting [42]), so ergeben sich in diesem System zur niedrigsten Ordnung wieder die Triple-Deck-Gleichungen, Gl. (3.16), (3.17). Alle Terme, die den örtlichen Krümmungsradius enthalten, sind von höherer Ordnung.

(2) Randbedingungen

Die Randbedingungen an der Wand lauten unabhängig von der Wahl von F(X):

$$H=0: \qquad \Psi=\Psi'=0 \qquad (4.13)$$

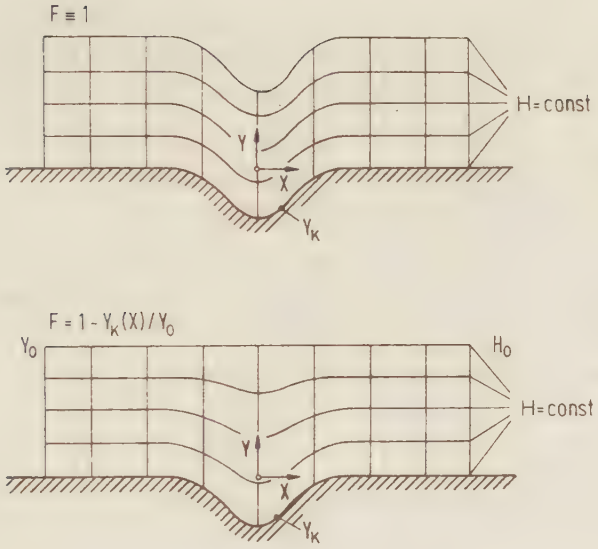


Bild 4.4: Koordinatensystem für die Dellenströmung Triple-Deck-Theorie

Ungewohnt sind die Außenrandbedingungen. Während das Geschwindigkeitsprofil (u -Komponente) einer 'normalen' Grenzschicht am Außenrand asymptotisch in die y-unabhängige Außengeschwindigkeit übergeht, geht das U-Profil des 'lower deck' am Außenrand in ein in Y lineares Profil über.
Bild 4.5 enthält eine Gegenüberstellung beider Profile und gibt auch eine anschauliche Interpretation der Verdrängungsdicken $\bar{\delta}_1$ bzw. D_1, wobei gilt:

$$D_1 = Y - U \quad \text{für} \quad Y \to \infty \tag{4.14}$$

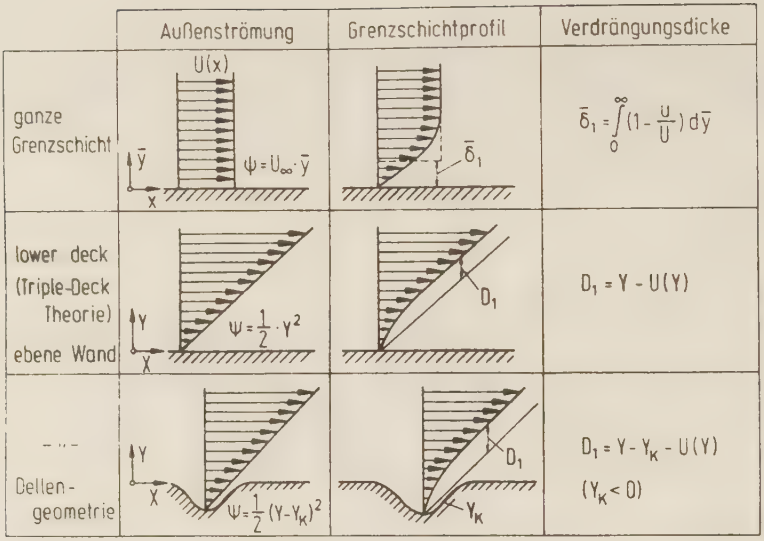


Bild 4.5: Grenzschichtprofil - 'lower deck'-Profil

Das Geschwindigkeitsprofil ist am Außenrand also nur um den Betrag D_1 seitlich versetzt, so daß für die Außenrandbedingung gilt:

$$H \to \infty : \qquad \Psi' = F^2 H - F D_1 \tag{4.15}$$

Es ist also Gleichung (4.12) mit den Randbedingungen (4.13) und (4.15) zu lösen. Die Wandgeometrie geht in das Problem über die Randbedingung (4.15) ein.

(3) Anfangsbedingungen ($X \to -\infty$)

Die Taylor-Entwicklung des ungestört ankommenden Geschwindigkeitsprofils, (3.14), lautet in 'lower deck' Koordinaten (s. Tabelle 3.1):

$$u_o(Y_L) = \epsilon\, Y_L \left.\frac{du_o}{dY_M}\right|_o + \epsilon^2 \frac{Y_L^2}{2} \left.\frac{d^2u_o}{dY_M^2}\right|_o + \cdots \qquad (4.16)$$

Der erste Term stellt die Anfangsbedingung für das Triple-Deck System 1.Ordnung dar ($O(\epsilon)$). (4.16) lautet unter der 'lower deck' Transformation (s. Tabelle 3.3):

$$U = \lambda^{-1} \frac{du_o}{dY_M} Y + \epsilon\, \lambda^{-\frac{7}{4}} \frac{Y^2}{2} \frac{d^2u_o}{dY_M^2} + \cdots \qquad (4.17)$$

so daß mit Gl. (3.15) die Anfangsbedingung für das Geschwindigkeitsprofil lautet:

$$\boxed{U = Y \quad \text{für} \quad X \to -\infty} \qquad (4.18)$$

Das Lösungsgebiet für die 'lower deck' Gleichungen muß zur numerischen Behandlung auf endliche Ausdehnungen $-X_\infty \leq X \leq X_\infty$ und $0 \leq H \leq H_\infty$ begrenzt werden. Innerhalb dieses Lösungsgebietes ist es sinnvoll, die Aufpunkte nicht äquidistant zu verteilen, sondern in Dellennähe z.B. auf folgende Weise zu konzentrieren:

$$\boxed{X = X_\infty \left[\frac{s + c_1 s^3}{1 + c_1}\right]} \qquad (4.19)$$

s äquidistant in $[-1,1]$

$$\boxed{H = H_\infty \left[\frac{t + c_2 t^3}{1 + c_2}\right]} \qquad (4.20)$$

t äquidistant in $[0,1]$

$c_1=c_2=0$ ist der Grenzfall äquidistanter Aufpunktverteilung. Steigende Werte von c_1 und c_2 bedeuten eine zunehmende Konzentration der Aufpunkte um den Nullpunkt.
Bezüglich der numerischen Aspekte gelten die Ausführungen in Kap. 3.4. Für die Funktion A(X) in Gleichung (3.21) gilt jetzt:

$$A(X) = - Y_k - D_1 \qquad (4.21)$$

4.1.2. Ergebnisse

Alle möglichen Dellenströmungen sind im Parameterfeld $[\varkappa_1, \varkappa_2]$ (s. Gl. (4.8), (4.9)) enthalten. Es sollen drei Beispielrechnungen gezeigt werden, deren Lage im $(\varkappa_1, \varkappa_2)$-Feld aus Bild 4.6 hervorgeht.

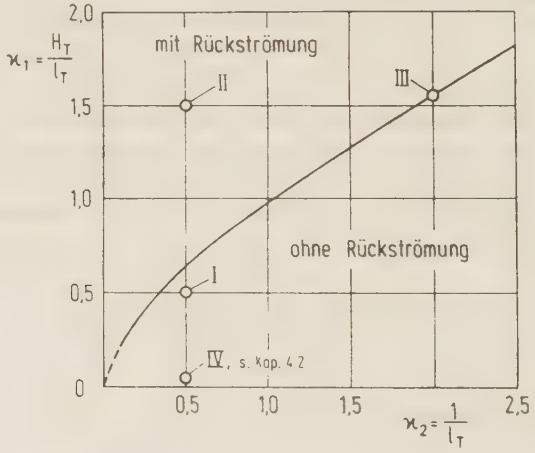
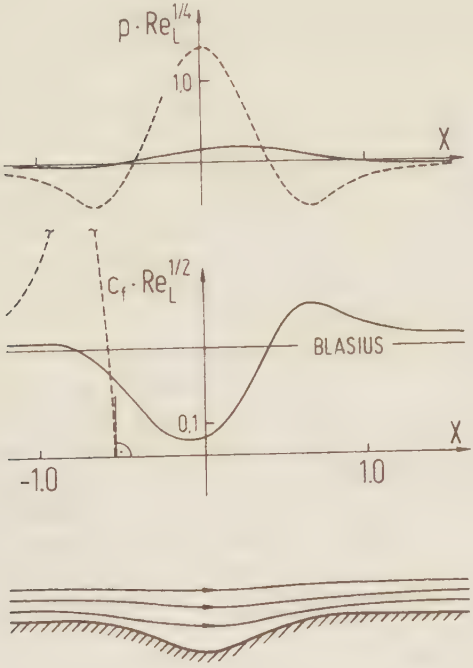


Bild 4.6: Parameter-Feld der Dellenströmung Triple-Deck-Theorie

In diesem Bild sind die Bereiche mit und ohne Rückströmung durch eine Grenzkurve getrennt, deren Verlauf punktweise bestimmt worden ist.



Re_L	H^*/l^*	l^*/L^*
⋮		
10^4	0.029	0.251
10^5	0.016	0.106
10^6	0.009	0.045
⋮		

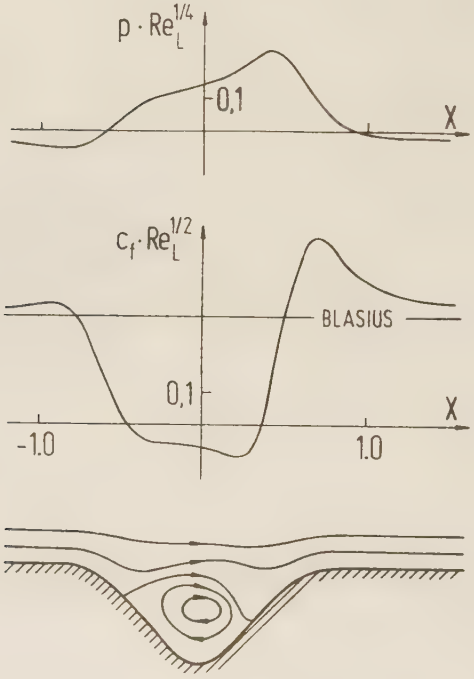
---- ohne Wechselwirkung

(Lösung der Prandtl'schen Grenzschichtgl. für $H^*/l^* = 0{,}016$)

Bild 4.7: Beispielrechnung I ; $H_T=1.0$, $l_T=2.0$, d.h.: $\varkappa_1=0.5$ $\varkappa_2=0.5$

Die Bilder 4.7 und 4.8 zeigen zwei Beispiele mit gleichem $l_T=2.0$, aber unterschiedlicher Tiefe H_T. Rückströmung tritt

für $l_T = 2.0$ bei $H_T > 1.36$ auf. Die Bilder enthalten jeweils Zahlenbeispiele aus den unendlich vielen Lösungen in physikalischen Variablen, die durch eine Triple-Deck-Lösung gefunden sind.



Re_L	H^*/l^*	l^*/L^*
⋮		
10^4	0.086	0.251
10^5	0.049	0.106
10^6	0.027	0.045
⋮		

Bild 4.8: Beispielrechnung II ; $H_T = 3.0$, $l_T = 2.0$, d.h.: $\varkappa_1 = 1.5$
$\varkappa_2 = 0.5$

Bild 4.7 enthält zum Vergleich eine Lösung ohne Wechselwirkung, die dadurch gewonnen wurde, daß die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen mit der potentialtheoretischen Druckverteilung über der Dellengeometrie gelöst wurden. Da die Geometrie Re-Zahl-abhängig ist, gilt die eingezeichnete Lösung nur für eine einzige Geometrie, hier für $H^*/l^*=0{,}016$. Für die Interpretation des Vergleiches beider Lösungen ist folgendes zu beachten:

Die Triple-Deck-Lösung gilt für diesen Vergleich bei der Re-Zahl $Re = 10^5$. Der in Gleichung (2.15), (2.16) eingeführte Parameter $\varkappa$ hat für diese Lösung den Wert

$$\varkappa = 5.0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda^{3/4} Re^{1/8} = 9.22$$

Die Lösung der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen ist (bei gegebener Geometrie) unabhängig von der Re-Zahl und gilt für den Grenzfall $Re^{-1} \to 0$, was einem Wert $\varkappa \to 0$ entspricht. In diesem Grenzfall tritt auch die Goldstein-Singularität auf, wie an der vertikalen Tangente im c_f-Verlauf bei $c_f = 0$ zu erkennen ist. Dies heißt also:

Es ist hier nicht möglich mit Hilfe der Prandtl'schen Grenzschichttheorie eine Lösung für $Re^{-1} \to 0$ zu finden, die für Werte von $Re^{-1} > 0$ (und damit $\varkappa > 0$) als Näherungslösung interpretiert werden könnte. Da die Lösung 1.Ordnung nicht im ganzen Lösungsfeld existiert, kann sie auch nicht durch Gleichungen höherer Ordnung verbessert werden. Auch an dieser Stelle ist deutlich zu erkennen, daß die übliche Grenzschichthierarchie durchbrochen ist.

In Bild 4.8 tritt bei $H_f = 3.0 > 1.36$ Rückströmung auf, wie sowohl am Stromlinienbild als auch an den negativen Schubspannungs-Werten zu erkennen ist. Es sollen für dieses Beispiel Angaben zu den gewählten numerischen Daten gemacht werden:

- Anzahl der Aufpunkte:
  - X - Richtung : 101
  - H - Richtung : 91

- Aufpunktverteilung (s. Gl. (4.19), (4.20))

  X - Richtung : $X_\infty = 20.0$; $c_1 = 5.0$

  H - Richtung : $H_\infty = 15.0$; $c_2 = 0.0$

- Relaxationsfaktor (s. Gl. (3.25)) : $\omega = 0.97$

- Abbruchschranke (s. Gl. (3.24)) : $C_K = 3 \cdot 10^{-3}$

- Anzahl der Iterationen : 48

- Rechenzeit (TR 440, RUB-Bochum) : ca. 40 min.

Das Rechenverfahren ist nur für eine extreme Unterrelaxation (hier: $1-\omega = 0{,}03$) konvergent, was zwangsläufig zu einer hohen Anzahl von Iterationen führt. In jüngster Zeit sind Verfahren entwickelt worden, die ohne Unterrelaxation auskommen, und damit erheblich kürzere Rechenzeiten benötigen (s. z.B. Veldman [56]).
Wie Bild 4.3 zeigt, beginnt der Iterationsprozeß mit einer geschätzten Verteilung für A(X). Ein sehr guter Schätzwert ist $A_0 \equiv 0$, was nach Gl. (4.21) einer Verteilung $D_1 = -Y_K$ entspricht. Bild 4.9 zeigt die Schubspannungsverteilung für diesen Schätzwert, ermittelt in der ersten Grenzschichtrechnung im Vergleich zur Schubspannungsverteilung nach 48 Iterationen.
Bild 4.9 zeigt auch deutlich den elliptischen Charakter, den das Gleichungssystem durch das Hilbert-Integral (Gl. (3.21)) hat. Während im ersten Schritt für $X \leq -1.0$ (vor Dellenbeginn) die ungestörte Blasius-Lösung gilt, wirkt sich die Störung im Iterationsprozeß stromaufwärts aus, wie an den Werten $c_f Re^{1/2} > (c_f Re^{1/2})_{BLASIUS}$ deutlich zu sehen ist.
Bild 4.10 (Beispielrechnung III) zeigt einen Grenzfall gerade einsetzender Rückströmung. Im Vergleich zu Beispielrechnung II (mit nahezu gleichem Parameter $\varkappa_1$) ist der deutliche Einfluß des Parameters $\varkappa_2$ erkennbar.

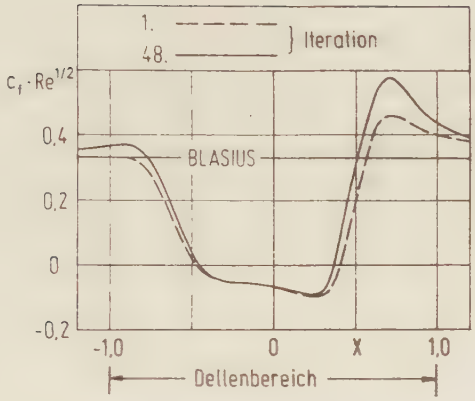


Bild 4.9: Beispielrechnung II ; A_o= 0.0 ; s.Bild 4.8

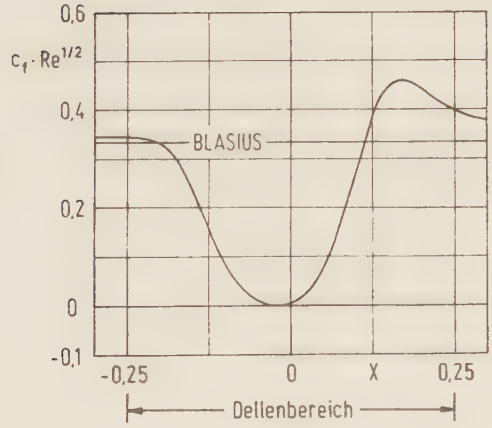


Bild 4.10: Beispielrechnung III
H_T=0.8 , l_T=0.5
d.h.: $\varkappa_1$=1.6 , $\varkappa_2$=2.0

4.2. Linearisierte Triple-Deck-Theorie

Da die Triple-Deck-Gleichungen eine nichtlineare Störung der Grundströmung beschreiben, ist es sinnvoll, für den Grenzfall kleiner Störungen eine linearisierte Form dieser Gleichungen zu entwickeln. Ein solcher Grenzfall kleiner Störungen ergibt sich für sehr flache Dellen, also für $H_T \to 0$. Zusammen mit $l_T = O(1)$ ist dies der Grenzfall $\varkappa_1 \to 0$ (s. Gl. (4.8)). Entwicklungsparameter ist auf Grund dieser Überlegung H_T:

$$\begin{aligned} U &= Y + H_T\bar{U} + O(H_T^2) \\ V &= \quad H_T\bar{V} + O(H_T^2) \\ P &= \quad H_T\bar{P} + O(H_T^2) \\ A &= \quad H_T\bar{A} + O(H_T^2) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die Gleichungen (3.16), (3.17) werden damit für die Ordnung $O(H_T)$, s. F.T. Smith [43]:

$$\boxed{Y\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{V} = -\frac{d\bar{P}}{dX} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial X^2}} \tag{4.23}$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} = 0} \tag{4.24}$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen:

$$X \to -\infty : \quad \partial\bar{U}/\partial Y = 0 \tag{4.25}$$

$$Y = 0 : \quad \bar{U} = -Y_w \; ; \; \bar{V} = 0 \tag{4.26}$$

$$Y \to \infty : \quad \bar{U} \to \bar{A}(X) \tag{4.27}$$

und dem Hilbert-Integral :

$$\frac{d\bar{A}}{d\bar{X}} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{P}}{\bar{X}-\bar{X}}\,d\bar{X} \qquad (4.28)$$

Mit Hilfe der Fourier-Transformation (F.T. Smith [46]) gelingt es, diese Gleichungen analytisch zu lösen. Die Lösungen für P(X) und T(X) lauten, wobei:

$$T(X) \equiv \partial U(X,0)/\partial Y = 1 + H_T\,\partial\bar{U}(X,0)/\partial Y = c_f\,\bar{\lambda}^{-1}\,Re^{1/2} \qquad (4.29)$$

$$P(X) = d\,K(X)/dX$$

$$K(X) = \frac{H_T\Theta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y_K(X-t)\,\hat{\alpha}(t)\,dt$$

$$\hat{\alpha} = \int_0^{\infty}\frac{(3^{1/2}s^{4/3}-2)\,e^{-\Theta st}}{(1-3^{1/2}s^{4/3}+s^{8/3})}\,ds \qquad \text{für } t>0$$

$$\hat{\alpha} = 2\int_0^{\infty}\frac{e^{\Theta st}}{1+s^{8/3}}\,ds \qquad \text{für } t<0$$

$$\Theta = [-3\,Ai'(0)]^{3/4} = 0.8272\ldots \qquad (4.30)$$

$$T(X) = 1 + dL(X)/dX$$

$$L(X) = -\frac{3 H_T \, Ai(0) \, \Theta^{4/3}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_K(X-t) \, \hat{\beta}(t) \, dt$$

$$\hat{\beta} = -\int_0^{\infty} s^{2/3} (3^{1/2} s^{4/3} - 1) \frac{e^{-\Theta s t} \, ds}{(1 - 3^{1/2} s^{4/3} + s^{8/3})} \qquad \text{für} \quad t > 0$$

$$\hat{\beta} = 2 \int_0^{\infty} \frac{s^{2/3} e^{\Theta s t}}{1 + s^{2/3}} \, ds \qquad \text{für} \quad t < 0 \qquad (4.31)$$

Die Gleichungen (4.30) und (4.31) sind durch numerische Integration zu lösen, wobei den Integrationsgrenzen besondere Aufmerksamkeit zu widmen ist. K(X) und L(X) sind Integrationen über endliche Bereiche, da die entsprechenden Integranden nur innerhalb des Bereiches $-l_T/2 < (X-t) < l_T/2$ von Null verschieden sind. Bei der Berechnung von $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ ist die Grenze '∞' durch einen endlichen Zahlenwert zu ersetzen, wobei insbesondere bei $\hat{\beta}$ sorgfältig darauf zu achten ist, daß dieser Zahlenwert hinreichend groß gewählt wird (für die folgenden Beispiele wurde gewählt: $s_\infty = 100$).
Bild 4.11 zeigt die Funktionen T(X) und P(X) nach Gl. (4.30), (4.31) im Vergleich zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen (Kap. 4.1) für einen sehr kleinen Wert H_T, hier $H_T = 0.2$. Mit $l_T = 2.$ entspricht die Vergleichsrechnung dem Punkt $(\varkappa_1, \varkappa_2) = (0.1, 0.5)$ im Parameter-Diagramm Bild 4.6.

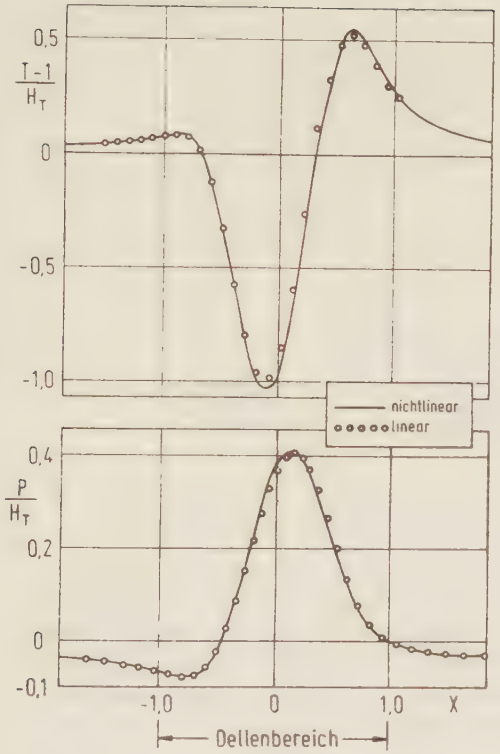


Bild 4.11: Vergleich: lineare/nichtlineare Triple-Deck-Lösung nichtlineare Rechnung mit den Parametern: $H_T=0.2$, $l_T=2.0$ d.h.: $\varkappa_1=0.1$, $\varkappa_2=0.5$ (Beispielrechnung IV)

Die verbleibenden Abweichungen sind offensichtlich keine Folge der Nichtlinearität, sondern darauf zurückzuführen, daß das nichtlineare Verfahren selbst nach 72 Iterationen nicht vollständig konvergiert ist. Bild 4.12 zeigt das Konvergenzverhalten des Druckes P an der Stelle X = 0.204.

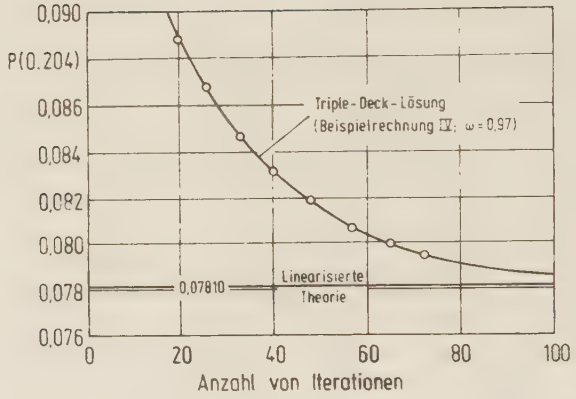


Bild 4.12: Konvergenzverhalten der nichtlinearen Lösung (Beispielrechnung IV) für den Druck an der Stelle X = 0.204

Bild 4.13 zeigt die zunehmende Abweichung der nichtlinearen Theorie von der linearisierten Fassung für den Wert $\mathbf{T}(X)$ an einer festen Stelle. Ein Ausschnitt aus dem $(\varkappa_1,\varkappa_2)$-Diagramm (Bild 4.6) zeigt die Parameter-Werte der einzelnen Beispielrechnungen. Die Asymptote für $\varkappa_1 \to 0$ (linearisierte Theorie) ergibt sich aus Gleichung (4.31) als:

$$\frac{d}{d\varkappa_1}\left[\frac{\partial U(X,0)}{\partial Y}\right] = -\frac{3\,Ai(0)\,\Theta^{4/2}\,l_T}{2\pi}\,\frac{d}{dX}\int_{-\infty}^{\infty} Y_K(X-t)\,\hat{\beta}(t)\,dt \qquad (4.32)$$

Bild 4.13 zeigt, daß bei $\varkappa_2 = 0{,}5$ die Übereinstimmung mit der linearisierten Theorie bis etwa $\varkappa_1 = 0{,}5$ recht gut ist. Dies ist ein relativ hoher Wert, da die Dellenströmung bei $\varkappa_1 > 0.68$ bereits Rückströmgebiete aufweist.

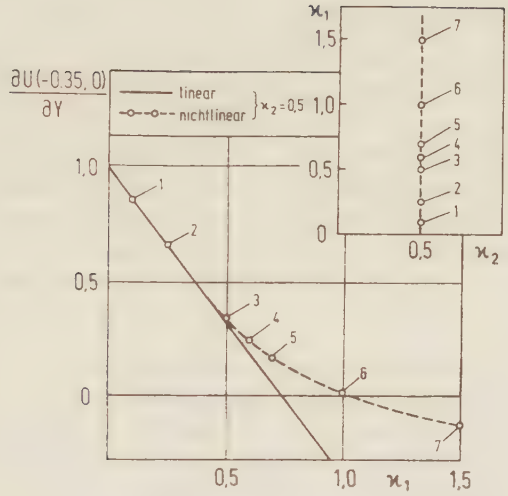


Bild 4.13: Vergleich: lineare/nichtlineare Triple-Deck-Theorie für $\varkappa_1 \to 0.0$

Folgender wichtiger Hinweis für die numerische Behandlung der Dellenströmung kann der linearisierten Theorie entnommen werden:
Mit Gleichung (4.30) gilt nach einmaliger Integration:

$$K(X) = \int_{-\infty}^{X} P(\hat{X})\, d\hat{X} \qquad (4.33)$$

Für den Auftriebsbeiwert der Platte mit Delle gilt:

$$c_A \equiv \frac{A}{\rho U_\infty^2 F} = \lambda^{-3/4} \epsilon^5 \int_{-\infty}^{\infty} P(\hat{X})\, d\hat{X} \qquad (4.34)$$

wobei A die Auftriebskraft und F eine charakteristische Bezugsfläche ist. Die Anwendung des globalen Impulssatzes besagt, daß $c_A = 0$ für alle Dellenformen gilt, so daß aus Gl. (4.33) folgt:

$$\lim_{X \to \infty} K(X) = 0$$

Betrachtet man den numerisch ermittelten Verlauf von K(X), so zeigt sich ein extrem langsames Abklingen gegen Null, wie in Bild 4.14 zu erkennen ist. D.h. in einem endlichen Lösungsgebiet ist der Hauptteil des Lösungsbereiches sinnvollerweise stromabwärts der Wandstörung (hier: Delle) zu verwenden.

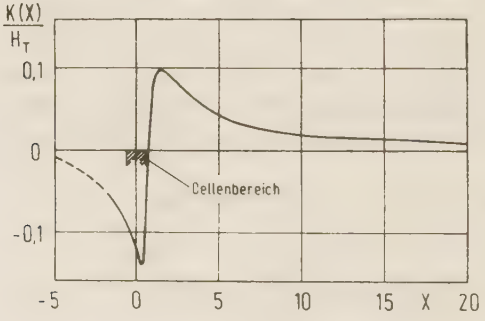


Bild 4.14: Verlauf der Funktion K(X) nach Gl.(4.30) für $l_T = 2.0$

4.3. Theorie für endliche Reynolds-Zahlen; WWG-Theorie

Die physikalische Beschreibung und mathematischen Grundlagen der Theorie 'wechselwirkender Grenzschichten' sind in Kap. 3.3 enthalten. Dort ist insbesondere auch auf die Unterschiede zwischen der Triple-Deck- und der WWG-Theorie hingewiesen worden. Bild 4.15 zeigt den jetzt erforderlichen Iterationsprozeß analog zu Bild 4.3 (Triple-Deck). Ziel dieses Kapitels ist es, einen direkten Vergleich an einem mit beiden Theorien berechneten Beispiel zu ermöglichen.

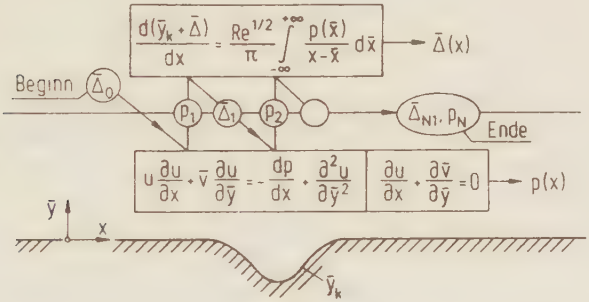


Bild 4.15: Iterationsprozeß ; WWG-Theorie/invers

4.3.1. Anwendung der WWG-Theorie auf die Dellenströmung

Die Kopplung der Dellengeometrie mit der Re-Zahl muß im Rahmen der WWG-Theorie so erfolgen, daß Dellentiefe und -länge in Prandtl'schen Grenzschichtkoordinaten von der Größenordnung O(1) sind. Deshalb werden folgende Größen eingeführt (vgl. Tab. 3.4):

$$H_w \equiv \frac{H^*}{L^*} Re^{1/2} = O(1) \tag{4.35}$$

$$l_w \equiv \frac{l^*}{L^*} = O(1) \tag{4.36}$$

Als Dellenform wird analog zu Gl. (2.8) und (4.4) folgende Funktion gewählt:

$$\frac{\bar{y}_K}{H_w} = -\frac{1}{4}\left\{\cos 2\pi\left[\frac{x}{l_w}+\frac{1}{2}\right]-1\right\}^2 \quad ; \quad -\frac{l_w}{2} \le x \le \frac{l_w}{2} \tag{4.37}$$

Folgender Zusammenhang gilt für die Geometrien in Grenzschichtkoordinaten $(x,\bar{y})$ und physikalischen Koordinaten (x^*,y^*):

Relative Dellentiefe:
$$\frac{H^*}{l^*} = \frac{H_w}{l_w} Re^{-1/2} = O(Re^{-1/2}) \tag{4.38}$$

1. Konturableitung:
$$\frac{dy_K^*}{dx^*} = \frac{d\bar{y}_K}{dx} Re^{-1/2} = O(Re^{-1/2}) \tag{4.39}$$

2. Konturableitung:
$$\frac{d^2y_K^*}{dx^{*2}} = L^{*-1}\frac{d^2\bar{y}_K}{dx^2} Re^{-1/2} = O(Re^{-1/2}) \tag{4.40}$$

Sowohl in der Triple-Deck- als auch in der WWG-Theorie kann man für eine vorgegebene Konturform Y_K (s. Gl. (4.4)) bzw. $\bar{y}_K$ (s. Gl. (4.37)) das Verhalten der Lösung für $Re^{-1} \to 0$ betrachten. In der Triple-Deck-Theorie ist dazu bekanntlich eine einzige Rechnung nötig, während die WWG-Theorie eine Folge von Rechnung für steigende Re-Zahlen erforderlich macht. Die Tabelle 4.2 soll zeigen, daß die 'physikalischen Geometrien'

im (x^*,y^*)-System sich mit verändernder Re-Zahl ganz unterschiedlich verhalten, d.h. ein direkter Vergleich beider Theorien bei jeder Re-Zahl eine erneute Umrechnung in die jeweiligen Koordinaten erforderlich macht (Beispiel s. Tab. 4.3)

physikal. Größe	Triple-Deck-Theorie	WWG-Theorie
Dellenlänge l^*/L^*	$O(Re^{-3/8})$	$O(1)$
Dellentiefe H^*/l^*	$O(Re^{-1/4})$	$O(Re^{-1/2})$
Wandkrümmung	$O(Re^{1/8})$	$O(Re^{-1/2})$

Tabelle 4.2: Dellengeometrie in Abhängigkeit von der Re-Zahl

Bei vorgegebenen Werten H_w und l_w werden die Dellen für steigende Re-Zahlen flacher. Tritt bei einer bestimmten Re-Zahl Rückströmung auf, so verschwindet diese bei entsprechend erhöhten Re-Zahlen. Als Erklärung hierfür ist die Tatsache, daß die Dellen (in physikalischen Variablen) dann flacher werden, allein nicht ausreichend. Denn: Eine Triple-Deck Lösung mit Rückströmung gilt (im asymptotischen Sinn) für alle Reynolds-Zahlen, und auch in diesem Fall werden die Dellen für $Re^{-1}\to 0$ stets flacher, wie Gleichung (4.5) zeigt. Der Unterschied zwischen beiden Theorien besteht darin, daß die Dellen zwar in beiden Fällen flacher werden, eine typische Wandkrümmung im Fall des Triple-Deck aber gegen Unendlich (s. Gleichung (4.7)) und im Fall der WWG-Theorie gegen Null geht, wie Gleichung (4.40) zeigt.

4.3.2. Ergebnisse

Tabelle 4.3 gibt die Werte H_w und l_w für den in Kap. 4.1.3 mit der Triple-Deck-Theorie gerechneten Fall 'Beispielrechnung II' für drei verschiedene Re-Zahlen an:

Triple - Deck Koordinaten		physikalische Koordinaten		Prandtl'sche GS-Koordinaten		Re
l_T	H_T	l^*/L^*	H^*/L^*	l_w	H_w	
2.0	3.0	0.1058	0.00514	0.1058	1.6267	10^5
"	"	0.1372	0.00793	0.1372	1.7738	$5 \cdot 10^4$
"	"	0.2510	0.02169	0.2510	2.1690	10^4

Tabelle 4.3: Dellengeometrie in verschiedenen Koordinatensystemen

Folgender asymptotischer Zusammenhang besteht zwischen Triple-Deck und WWG-Theorie:

$$p \sim \lambda^{1/2} Re^{-1/4} P \qquad (4.41)$$

$$c_f Re^{1/2} \sim \lambda \frac{\partial U(X,0)}{\partial Y} \qquad (4.42)$$

Bild 4.16 zeigt den Vergleich beider Theorien am Beispiel der Schubspannungsverteilung für die drei Re-Zahlen aus Tabelle 4.3. Im Rahmen der Triple-Deck-Theorie sind Änderungen der Grundlösung Terme höherer Ordnung und werden daher vernachlässigt. In der WWG-Theorie werden diese bis zur Ordnung der Prandtl'schen Grenzschichttheorie mit berücksichtigt. Für kleiner werdende Re-Zahlen nehmen die Änderungen zu, da auch die Dellenlänge in physikalischen Variablen wächst (s. Tab. 4.3). Der wachsende Abstand der Kurven b) und c) in Bild 4.16 verdeutlicht diesen Effekt.
Kleine Re-Zahlen bedeuten in der WWG-Theorie auch kurze Abstände zur Plattenvorderkante im Sinne des Verhältnisses l^*/L^* (s. Bild 2.2). Da die Störwirkung der Delle aufgrund des elliptischen Charakters der Außenströmung stromaufwärts wirkt,

muß die Plattenvorderkante eine ausreichende Entfernung von der Delle haben, damit die Grenzschicht den Dellen-Einfluß vollständig erfassen kann. Dies begrenzt den Re-Zahl Bereich nach unten hin. Die Abweichungen von der Triple-Deck-Theorie sind aber selbst bei $Re=10^4$ und damit einem Abstand $L^* \approx 4 l^*$ noch gering, wie Bild 4.16 zeigt.

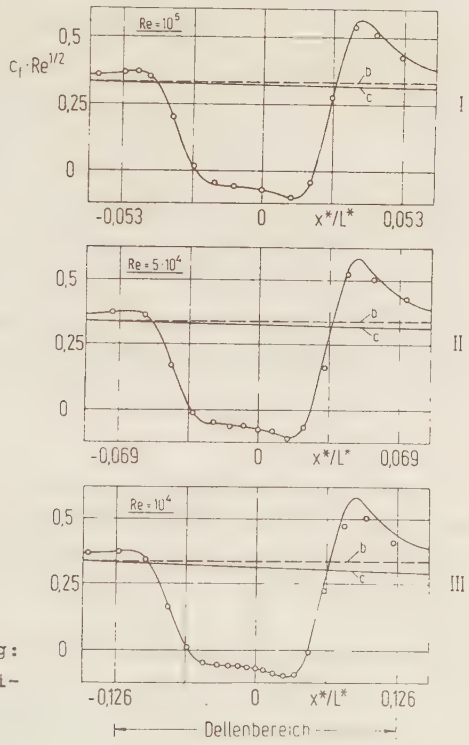


Bild 4.16: Vergleichsrechnung:

—— Triple-Deck-Theorie (Beispielrechnung II)

oooo WWG-Theorie

ebene Platte im Rahmen der
b) Triple-Deck-Theorie
c) WWG-Theorie

Im Rahmen der Triple-Deck-Theorie ist der Druck von der Größenordnung $O(Re^{-3/4})$, s. Gl. (3.13), und damit erheblich größer als in der üblichen Grenzschichttheorie, wo der Druck aufgrund der Grenzschichttheorie 2.Ordnung von der Größenordnung $O(Re^{-1/2})$ ist, s. z.B. Gersten, Gross [23].
Die Potenz $-\frac{1}{4}$ im Druckterm kann numerisch auf folgende Weise nachgeprüft werden:
Einer in physikalischen Variablen gegebenen Dellengeometrie entsprechen für zwei verschiedene Re-Zahlen zwei verschiedene Rechnungen für $\bar{y}_{K,1}$ und $\bar{y}_{K,2}$. Für den Druck z.B. an der Stelle x=0 gilt dann für die Rechnungen 1 und 2:

$$\frac{p_1(0)}{p_2(0)} = \left[\frac{Re_1}{Re_2}\right]^{\alpha} \qquad (4.43)$$

wobei $\alpha=-\frac{1}{4}$ im Rahmen der Triple-Deck-Theorie ist. Tabelle 4.4 gibt zwei solche Rechnungen an:

Tabelle 4.4: Eine Dellengeometrie bei zwei Re-Zahlen

l^*/L^*	H^*/L^*	l_w	H_w	$p(0)$	Re
0.1058	0.00514	0.1058	1.6267	0.00789	10^5
		0.1058	1.1502	0.00925	$5{\cdot}10^4$

Eingesetzt in Gleichung (4.43) ergibt dies den Wert $\alpha = -0.23$, was zeigt, daß die Übereinstimmung zwischen WWG- und Triple-Deck-Theorie bis zu diesen Re-Zahlen recht gut ist.

4.3.3. WWG-Theorie für Strömungen ohne Rückströmgebiete

Wenn im Lösungsgebiet mit Rückströmungen zu rechnen ist, so muß das Grenzschichtverfahren notwendigerweise invers gerechnet werden, um die Goldstein-Singularität zu vermeiden. Bild 4.3 zeigte für Triple-Deck Rechnungen das Iterationsschema, in dem dann auch die Außenströmung invers zu rechnen

ist, d.h. zu einer gegebenen Druckverteilung ist der entsprechende Körper gesucht. Tritt Rückströmung nicht auf, so können beide Probleme, Grenzschicht und Außenströmung, direkt gerechnet werden. Bild 4.17 zeigt das entsprechende Iterationsschema. Die Gleichungen sind im Prinzip durch Gl. (3.58)-(3.63) gegeben, jetzt aber wohlgemerkt direkt zu lösen.

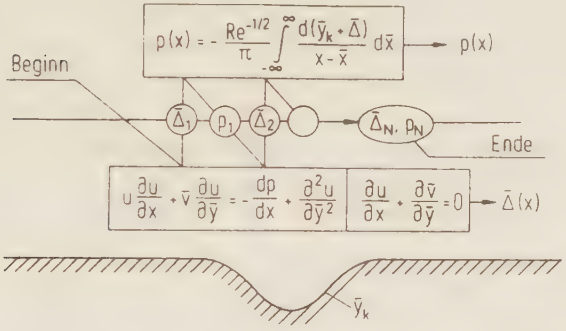


Bild 4.17: Iterationsprozeß ; WWG-Theorie/direkt

Dabei taucht eine Schwierigkeit auf: Wenn auch die konvergierte Lösung ohne Rückströmgebiete ist, so kann doch während des Iterationsprozesses ein Zwischenschritt mit Rückströmgebiet und damit bei direktem Lösungsverfahren die Goldstein-Singularität auftreten. Genau dies tritt in der Regel ein und erfordert daher ein besonderes Iterationsverfahren.
Als Beispiel soll eine Triple-Deck Lösung mit den Daten $t_T=2.0$, $H_T=0.5$ (d.h. $\varkappa_1=0.25$, $\varkappa_2=0.5$ in Bild 4.6) mit einem direkten Verfahren gerechnet werden. Beginnt man die Rechnung mit der potentialtheoretischen Druckverteilung über der Delle,

so führt die erste Grenzschichtrechnung zur Goldstein-Singularität, wie Bild 4.18 zeigt.

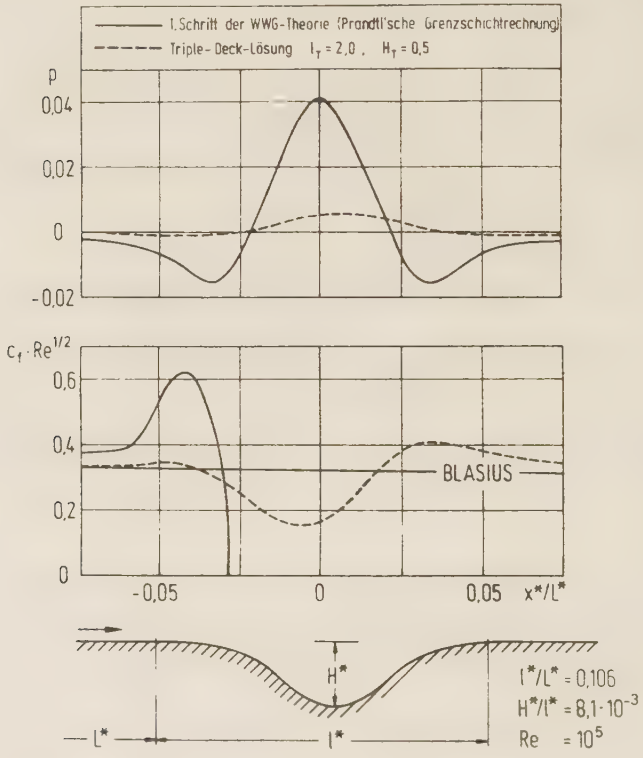


Bild 4.18: 1. Iterationsschritt ; WWG-Theorie/direkt

Wie die miteingezeichnete endgültige Lösung zeigt, findet durch die Wechselwirkung eine drastische Änderung des Strömungsfeldes statt. An der endgültigen Druckverteilung ist zu erkennen, daß die Verdrängungskontur sehr viel flacher verlaufen wird als die Dellengeometrie. Diese Tatsache legt folgendes Iterationsschema nahe:
Die Rechnung beginnt nicht mit der Dellengeometrie y_K, sondern mit einer flacheren Delle $a_1 y_K$ mit $0 \leq a_1 \leq 1$ und wird dann im Iterationsprozeß schrittweise vertieft, bis nach N_1 Iterationsschritten die endgültige Dellengeometrie erreicht wird. Die mathematische Formulierung der Geometrie im Iterationsschritt i lautet also:

$$\begin{aligned} y_{Ki} &= y_K \left[a_1 + (1 - a_1) \frac{i-1}{N_1 - 1} \right] \quad \text{für } 1 \leq i \leq N_1 \\ y_{Ki} &= y_K \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{für } N_1 < i \end{aligned} \tag{4.44}$$

wobei $0 \leq a_1 \leq 1$.
Bild 4.19 zeigt das Verhalten der Größe $c_f Re^{1/2}|_{min}$ für eine solche Rechnung.

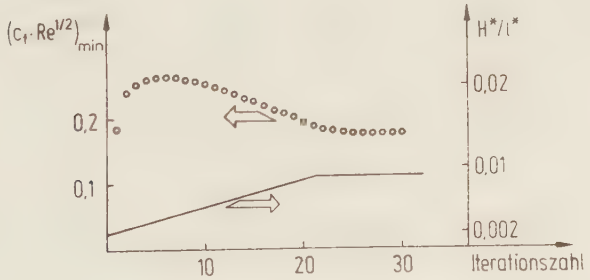


Bild 4.19: Konvergenzverhalten des Schubspannungsminimums ; $a_1 = 0.22$, $N_1 = 21$
(Dellenparameter: $l^*/L^* = 0.106$,
$H^*/l^* = 8.1 \cdot 10^{-3}$
$Re = 10^5$)

Es ist deutlich zu erkennen, daß die Goldstein-Singularität auf diese Weise vermieden werden kann, da sich die Schubspannungsverteilung für das gezeigte Beispiel sogar 'von oben' dem Endwert nähert.
Bild 4.20 zeigt den Vergleich zwischen einer Triple-Deck-Lösung (hier invers gelöst) mit einer direkten Lösung der WWG-Theorie am Beispiel des Druckverlaufes. Die Übereinstimmung ist zufriedenstellend.
Es sei angemerkt, daß natürlich auch das Triple-Deck-Lösungsschema direkt gelöst werden kann, solange keine Rückströmungen auftreten. Im Rahmen dieser Arbeit wurden Triple-Deck-Rechnungen allerdings immer invers durchgeführt.

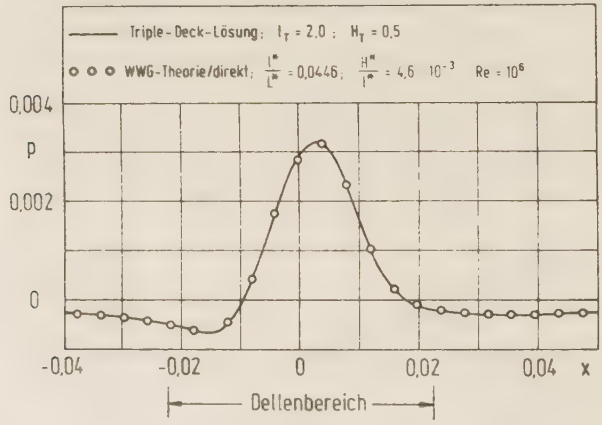


Bild 4.20: Vergleichsrechnung:
Triple-Deck / WWG-Theorie(direkt)

4.4. Ergebnisse in physikalischen Variablen

In diesem Abschnitt sollen wichtige Ergebnisse aus dem Kap. 4 in physikalischen Variablen dargestellt werden. Diese Darstellung erfordert naturgemäß einen höheren Aufwand, hat aber den Vorteil einer besseren Anschaulichkeit. Als erstes Beispiel soll hier zunächst das Druckmaximum (als eine charakteristische Größe der Dellenströmung) in seiner Abhängigkeit von den übrigen Variablen wiedergegeben werden.

4.4.1. Druckmaximum

Während die Triple-Deck-Theorie alle möglichen Dellenströmungen durch die beiden Parameter $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ (s. Gl. (4.8), (4.9)) erfaßt, liegt in physikalischen Variablen ein drei-Parameter System von Lösungen vor, wie dies bereits in Kap. 2.3.4 beschrieben wurde. Die Parameter sind H^*/l^*, L^*/l^* und Re (s. Bild 2.2). Die gesuchte Darstellung

$$p_{max} = \frac{p^*_{max} - p_\infty}{\rho U_\infty^2} = f\left(\frac{H^*}{l^*}, \frac{L^*}{l^*}, Re\right) \qquad (4.45)$$

ist anschaulich in drei Diagrammen möglich, wenn jeweils zwei der drei Parameter festgehalten werden. Diese fixierten Parameter sollen im hier gewählten Beispiel jeweils den Werten

$$\frac{H^*}{l^*} = 0.05 \quad , \quad \frac{L^*}{l^*} = 10 \quad , \quad Re = 5 \cdot 10^4 \qquad (4.46)$$

entnommen werden.
(4.46) beschreibt in Triple-Deck-Koordinaten den Fall $\varkappa_1 = 1\,298$ $\varkappa_2 = 0.686$ (s. Bild 4.6).
Bild 4.21 zeigt die gesuchte Darstellung. Die Zahlenwerte wurden dabei durch lineare Interpolation in der $(\varkappa_1, \varkappa_2)$-Ebene aus in Kap. 4 berechneten Triple-Deck-Lösungen ermittelt. In allen drei Fällen sind in den hier gewählten Parameter-Bereichen eindeutige Trends festzustellen.

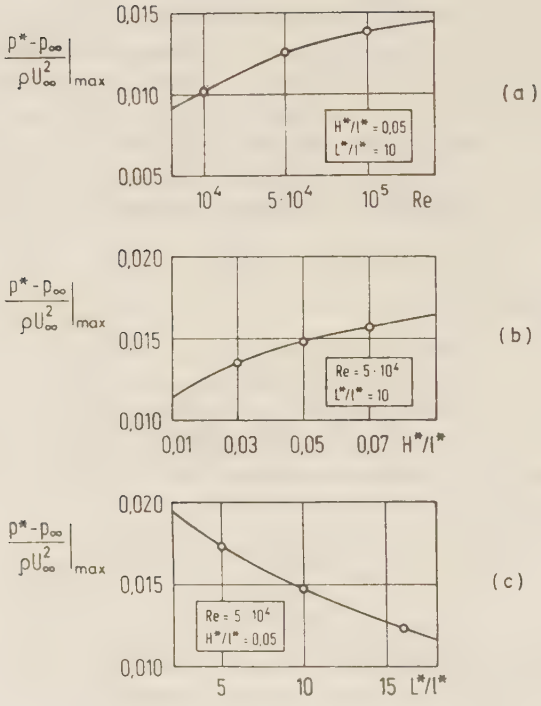


Bild 4.21: Druckmaximum der Dellenströmung als Funktion der Parameter Re , H^*/l^* , L^*/l^*

In der Auftragung von Bild 4.21 sind sowohl Fälle mit Rückströmung als auch solche ohne Rückströmung enthalten. Es wurde bereits an früherer Stelle (s. z.B. Bild 4.13) nachge-

wiesen, daß der Übergang zwischen diesen beiden Strömungszuständen kontinuierlich verläuft. Bild 4.22 zeigt dies noch einmal für das Druckmaximum als Funktion der relativen Dellentiefe. Die Asymptote für $H^*/l^* \to 0$ wurde dabei mit Hilfe der linearisierten Triple-Deck-Theorie (Kap. 4.2) berechnet.

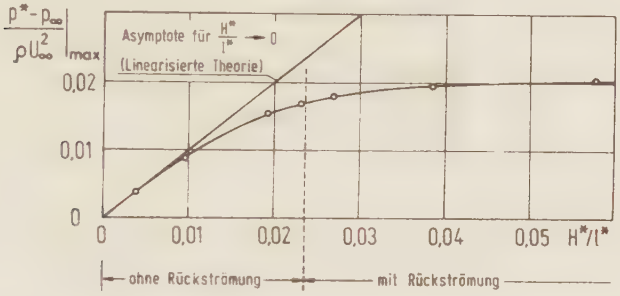


Bild 4.22: Druckmaximum als Funktion von H^*/l^*
(bei: $L^*/l^*=7.29$, $Re=5\cdot10^4$)

Die Definition der Triple-Deck-Variablen, insbesondere die von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, macht deutlich, daß jede Kurve in physikalischen Variablen, wie sie etwa in Bild 4.21 enthalten sind, eindeutig einer Kurve (in Ausnahmefällen einem Punkt) im $(\varkappa_1,\varkappa_2)$-Diagramm zugeordnet ist. Dies gilt nicht umgekehrt.
Bild 4.23 zeigt die Funktionen aus den Bildern 4.21, 4.22 im $(\varkappa_1,\varkappa_2)$-Diagramm, wobei die Pfeile jeweils in positive Abszissen-Richtung weisen.

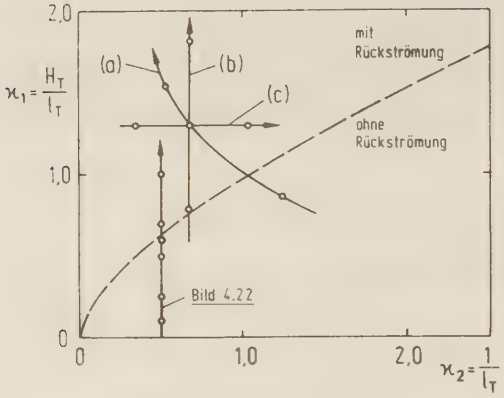


Bild 4.23: Verlauf der Funktionen aus Bild 4.21,4.22 im Zwei-Parameter Triple-Deck-Diagramm

4.4.2. Grenzkurven beginnender Rückströmung

In Triple-Deck-Koordinaten sind die Gebiete 'mit Rückströmung' und 'ohne Rückströmung' durch eine Grenzkurve getrennt, wie dies z.B. in Bild 4.23 eingezeichnet ist. In physikalischen Variablen ergibt sich eine Schar von Grenzkurven, wie dies als Beispiel in der Auftragung l^*/L^* über H^*/l^* mit der Re-Zahl als Parameter in Bild 4.24 gezeigt ist. Für jede Re-Zahl liegt der Bereich 'mit Rückströmung' oberhalb der entsprechenden Grenzkurve; unterhalb dieser Kurve kommt es nicht zur Rückströmung.

An Bild 4.24 ist deutlich der Einfluß der Wechselwirkung auf das Strömungsverhalten zu erkennen:

Bei festen Parametern H^*/l^* und l^*/L^* bewirkt eine wachsende Re-Zahl die Verkleinerung einer charakteristischen Grenz-

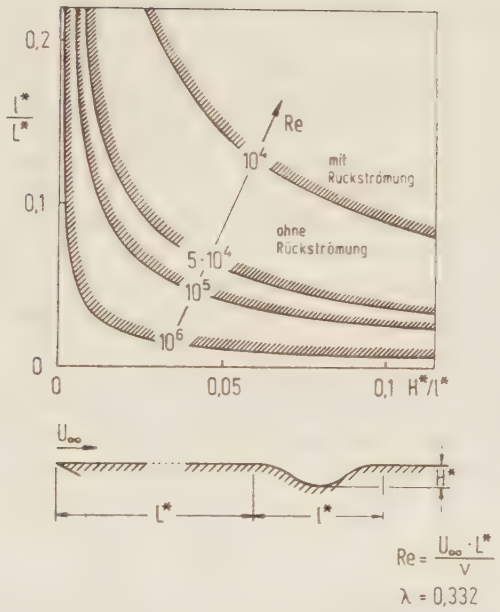


Bild 4.24: Grenzkurven beginnender Rückströmung

schichtdicke δ^* (s. Kap. 2.3.4) und damit auch eine Verkleinerung des Parameters $\varkappa = \delta^*/H^*$. Dies bedeutet in der Tendenz aber eine verminderte Wechselwirkung und damit eine Reduzierung des Rückströmung verhindernden Einflusses der Wechselwirkung zwischen Grenzschicht und Außenströmung.
Es muß hier zur korrekten Interpretation von Bild 4.24 daran erinnert werden, daß hier Aussagen wiedergegeben werden, die mit der Triple-Deck-Theorie gewonnen wurden, die also auch an deren Voraussetzungen gebunden sind. Dies heißt insbesondere, daß die Triple-Deck-Systemparameter l_T und H_T von der Größenordnung O(1) sein müssen und nicht über alle Grenzen wachsen dürfen.

4.4.3. Widerstand der Delle

Da die Dellenströmung im asymptotischen Sinn als Störung der Grundströmung (Blasius) interpretiert wird, ist es sinnvoll zu fragen, wie der Widerstand bei vorhandener Delle gegenüber dem Plattenwiderstand verändert wird. Typische Druck- und Schubspannungsverteilungen (s. z.B. Bild 4.8) lassen vermuten, daß sowohl Druck- als auch Reibungswiderstände zu berücksichtigen sind.
Eine systematische Analyse geht vom allgemeinen Spannungszustand im kartesischen x*-y*-Koordinatensystem (Normalspannungen: σ_{xx} , σ_{yy} ; Schubspannung: τ_{xy}) aus, der auf ein wandparalleles s*-n*-Koordinatensystem (Normalspannung: σ_{ss} , σ_{nn} ; Schubspannung: τ_{ns}) umgeschrieben wird. Das s*-n*-System sei um den Winkel α gegenüber dem ursprünglichen x*-y*-System gedreht, s. Bild 4.25.

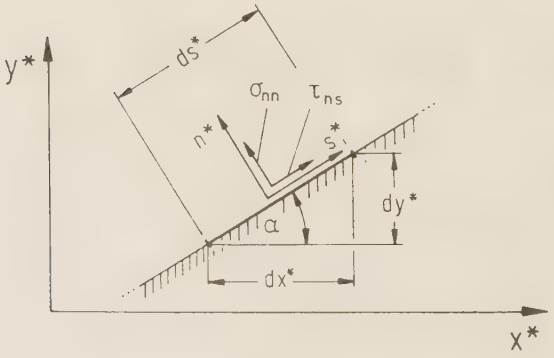


Bild 4.25: Normal- und Schubspannungen am Wandelement $b^* \cdot ds^*$

Mit den Spannungskomponenten (s. z.B. Schlichting [42])

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -(p^* - p_\infty) + 2\eta\,(\partial u^*/\partial x^*)\\ \sigma_{yy} &= -(p^* - p_\infty) + 2\eta\,(\partial v^*/\partial y^*)\\ \tau_{xy} &= \eta\,(\partial u^*/\partial y^* + \partial v^*/\partial x^*)\end{aligned} \tag{4.47}$$

gilt für die Normal- bzw. Schubspannungskomponente auf dem Wandelement $b\,ds$, abhängig vom Neigungswinkel α :

$$\begin{aligned}\sigma_{nn}(\alpha) &\equiv \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha\\ &= -p + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos 2\alpha - \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin 2\alpha\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}\tau_{ns}(\alpha) &\equiv -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha\\ &= -\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin 2\alpha + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos 2\alpha\end{aligned} \tag{4.49}$$

Für die Kraftkomponente in x^*-Richtung, bezogen auf die Breite b:

$$\frac{dF_x^*}{b} = (-\sigma_{nn}\sin\alpha + \tau_{ns}\cos\alpha)\,ds^* \tag{4.50}$$

gilt nach Anwendung der entsprechenden trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\frac{dF_x^*}{b} = (p^* - p_\infty)\tan\alpha\,dx^* - 2\eta\frac{\partial u^*}{\partial x^*}dy^* + \eta\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)dx^* \tag{4.51}$$

Unter Verwendung der dimensionslosen Größen nach Tab. 2.1 gilt für $dF_x = dF_x^*/(\rho U_\infty^2 b L^*)$:

$$dF_x = p \tan\alpha \, dx + Re^{-1}\left[2\frac{\partial u}{\partial x}dy + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dx \right] \qquad (4.52)$$

In Triple-Deck-Variable umgeschrieben lautet Gl. (4.52) jetzt:

$$dF \equiv dF_x \, \lambda^{3/4}\epsilon^{-7} = \left[Y_K' \, P(X) + \partial U(X,0)/\partial Y \right] dX + \epsilon^{4}\lambda \left[Y_K' \, 2\,\partial U/\partial X + \partial V/\partial X \right] dX \qquad (4.53)$$

Für die ebene Platte gilt wegen $Y_K = 0$ und $\partial U(X,0)/\partial Y = 1$

$$dF_B = dX \qquad (B \triangleq \text{Blasius}) \qquad (4.54)$$

so daß für den Widerstand W_D, verursacht durch die Delle als Störung der Plattenströmung, gilt:

$$W_D = \int_{-\infty}^{\infty} \left(P(X)\, Y_K' + \left(\frac{\partial U(X,0)}{\partial Y} - 1 \right) \right) dX + O(\epsilon^4) \qquad (4.55)$$

Y_K beschreibt die Kontur in Triple-Deck-Variablen, die X-Ableitung, Y_K', ist nur im Intervall $[-l_T/2, l_T/2]$ von Null verschieden.

Eine numerische Auswertung der Gleichung (4.55) für die 'Beispielrechnung II' aus Kap. 4.1.2 (in diesem Beispiel ist $\varkappa_1 = 1.5$, $\varkappa_2 = 0.5$) ergibt folgende Zahlenwerte:

Für den 'Druckwiderstand' gilt:

$$I_1 \equiv \int_{-1}^{+1} P(X) \frac{\partial Y_K}{\partial X} dX = 0{,}6308 \qquad (4.56)$$

Für den 'Reibungswiderstand' gilt:

$$I_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial U(X,0)}{\partial Y} - 1 \right) dX = -0{,}6404 \qquad (4.57)$$

Beide Terme sind für sich genommen von der Größenordnung O(1), die Summe aus beiden ist mit $I_1+I_2 = -0{,}0096$ praktisch gleich Null. Tatsächlich läßt sich nachweisen, daß I_1+I_2 und damit auch W_D exakt zu Null werden muß. Brighton [7] zeigt dies für ein allgemeines nichtlineares Triple-Deck-Problem. Die hier auftretende endliche Summe I_1+I_2 stellt eine numerische Ungenauigkeit von etwas über 1% dar (die z.B. auch auf die Integration mit der Trapez-Regel zur Bestimmung von I_1 und I_2 zurückzuführen ist).

Es ergibt sich also der zunächst überraschende Tatbestand, daß durch die Delle der Gesamtwiderstand der Platte nicht verändert wird, die Störung durch die Delle also nicht zu 'globalen', sondern nur zu 'lokalen' Veränderungen führt. Diese Aussage gilt im Rahmen der Triple-Deck-Theorie 1.Ordnung. Von Null verschiedene Werte von W_D (Gl. (4.55)) treten also, wenn überhaupt, erst in höheren Ordnungen auf. Brighton [7] kommentiert dieses Ergebnis wie folgt: "These results are rather paradoxical for since the hump produces O(1) changes in skin-friction distribution, we might expect the added drag to be comparable to the unperturbed total drag over the length of the hump. Presumably analysis of high enough terms could produce a non-zero-drag."

Mag das Ergebnis auch auf den ersten Blick paradox erscheinen, so liefert der globale Impulssatz über einen Kontrollraum K angewandt eine plausible Erklärung für das Ergebnis $W_D=0$ im Rahmen der Triple-Deck-Theorie 1.Ordnung: Wird der Kontrollraum hinreichend groß gewählt, so sind die ein- bzw. austretenden Geschwindigkeitsprofile jeweils von der Form $U=Y$, d.h. die Impulsänderung in X-Richtung ist gleich Null. Damit muß aber auch die Summe der Kräfte in X-Richtung verschwinden.

Die einzigen von Null verschiedenen Beiträge rühren von den Stützkräften an der Wand her. Dort treten Tangential- und Normalspannungen auf, welche zu Kraftkomponenten führen, die sich gerade kompensieren müssen.

5. Grenzschichten mit Ablösung

Die in diesem Kapitel behandelten Strömungen sind dadurch gekennzeichnet, daß die Grenzschicht als ganzes die Wand verläßt und den Charakter einer freien Scherschicht annimmt. Der Wandabstand dieser Scherschicht ist von der Größenordnung O(1). Im Sinne der in Kapitel 2.3.5 gegebenen Definition handelt es sich hierbei im Gegensatz zu den im vorherigen Kapitel behandelten Strömungen um Strömungen mit Ablösung, charakterisiert durch folgenden Grenzprozeß :

$$\boxed{\begin{aligned} Re^{-1} &= \frac{\nu}{U_\infty L^*} \to 0 \\ \varkappa &= \frac{\delta^*}{H^*} \longrightarrow 0 \end{aligned}} \qquad (5.1)$$

In diesem Kapitel werden folgende Bezeichnungen verwendet:

Ablösepunkt x_s : Konturstelle mit $\tau_w = 0$ einer Grenzschichtrechnung ($Re^{-1} \to 0$), entspricht damit für dieses Kapitel dem Begriff 'separation point' aus Kapitel 2.3.5.

Abströmpunkt x_0 : Konturstelle, an der die Wandstromlinie einer Euler-Lösung ($Re^{-1} = 0$) sich aufteilt und mit einer Verzweigung die Wand verläßt, entspricht damit dem Begriff 'break away point' aus Kapitel 2.3.5.

Die im Rahmen der asymptotischen Theorie notwendige Vermeidung der Goldstein-Singularität (s. Kap. 2.2) erfolgt hier durch eine entsprechende Wahl der Außenströmung für $Re^{-1} = 0$ Die Druckverteilung vor dem Abströmpunkt muß notwendigerweise so beschaffen sein, daß sie nicht zur Goldstein-Singularität führt.
Tabelle 5.1 zeigt noch einmal charakteristische Unterschiede der Strömungen mit $\varkappa^{-1} \to 0$ und $\varkappa \to 0$.

Rückström- / Ablösegebiet	$\varkappa^{-1} \to 0$ Kap. 4. Grenzschichten mit Rückströmung	$\varkappa \to 0$ Kap. 5. Strömungen mit Ablösung
Längsabmessung	$\leq O(1)$	$= O(1)$
Querabmessung	$\leq O(Re^{-1/2})$	$= O(1)$
Vermeiden der Goldstein-Singul. durch :	Kopplung der Geometrie an die Re-Zahl (Plattenlösung für $Re^{-1}=0$)	Wahl der Druckverteilung vor dem Abströmpunkt S_o

Tabelle 5.1: Vergleich: Strömungen mit Ablösung - Grenzschichten mit Rückströmung

5.1. Eine rationale Theorie abgelöster Strömungen

5.1.1. Mögliche Druckverteilungen um den Abströmpunkt x_c

Die Frage nach den möglichen Druckverteilungen ist eng mit der Frage verbunden, wie die freie Stromlinie die Wand verläßt. Bild 5.1 zeigt die Umgebung des Abströmpunktes der Einfachheit wegen zunächst für eine ebene Wand. Ein tangentiales Abströmen ist notwendige Voraussetzung, da sonst bei x_o ein Staupunkt entsteht.
Eine genaue Analyse der Potentialströmung um x_o (J.H.B. Smith [47], Ackerberg [1]) ergibt nun, daß die Funktion $y_1(x)$ nicht beliebig ist, sondern nur die Form einer Potenzfunktion mit festgelegten Exponenten annehmen kann. Die Analyse bezieht sich dabei auf die Modellvorstellung der freien Stromlinie (Kirchhoff-Strömung; s. Kap. 5.2), was bedeutet, daß die Geschwindigkeit auf der freien Stromlinie konstant ist. Gleich-

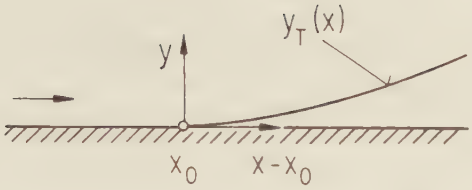


Bild 5.1: Die freie Stromlinie in der Nähe des Abströ - punktes x_o

zeitig erhält man eine Aussage über die Druckverteilung vor dem Abströmpunkt x_o. Es gilt:

$$p - p_o = -c_o(x_o - x)^{1/2} + c_1(x_o - x)^{3/2} + \dots \quad \text{für } x < x_o \tag{5.2}$$

$$y_T = \frac{2}{3}c_o(x - x_o)^{3/2} + \frac{2}{5}c_1(x - x_o)^{5/2} + \dots \quad \text{für } x > x_o \tag{5.3}$$

wobei gilt $c_o, c_1 > 0$.
Tabelle 5.2 führt die beiden Summanden in Gl. (5.2) bzw. Gl. (5.3) getrennt auf und zeigt ihr fundamental unterschiedliches Verhalten, besonders auch im Grenzprozeß $x \to x_o$.
Der Fall $y_T = \frac{2}{3}c_o(x - x_o)^{3/2}$ ist durch eine vertikale Tangente im Druckgradienten-Verlauf bei x_o gekennzeichnet.
Für die gesuchte Grundlösung der asymptotischen Beschreibung abgelöster Strömungen kann dieser Fall unabhängig davon, ob die Singularität zu beseitigen ist oder nicht, mit folgendem Argument ausgeschlossen werden:
Die asymptotische Beschreibung abgelöster Strömungen erfordert eine lokale Sonderbetrachtung in einem Gebiet von der Größenordnung $O(Re^{-\frac{1}{16}})$ um x_o, wie im nachfolgenden Kapitel gezeigt wird. Nur in diesem Gebiet könnte der durch $y_T \approx (x - x_o)^{3/2}$ gegebene Druckgradient $dp/dx \approx (x_o - x)^{-1/2}$ modifiziert werden. Außerhalb

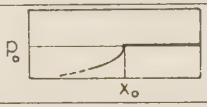
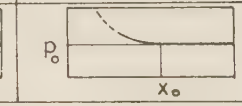
$\exp(y_\tau)$	3/2	5/2
$y_\tau =$	$\frac{2}{3} c_0 (x-x_0)^{3/2}$	$\frac{2}{5} c_1 (x-x_0)^{5/2}$
$p - p_0 =$	$-c_0 (x_0-x)^{1/2}$	$c_1 (x_0-x)^{3/2}$
$\frac{dp}{dx} =$	$\frac{c_0}{2} (x_0-x)^{-1/2}$	$-\frac{3}{2} c_1 (x_0-x)^{1/2}$
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{y_\tau''}{(1+y_\tau')^{3/2}}$	∞	0
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{dp}{dx}$	∞	0
prinzipieller Verlauf der Druckverteil.		

Tabelle 5.2: Druckverteilung um den Abströmpunkt x_0

dieses Bereiches unterliegt die ankommende Grenzschicht aber weiterhin diesem Druckgradienten. Bei einer genügend großen Re-Zahl ist der $O(Re^{-1/16})$-Bereich so klein geworden, daß es bereits vor diesem Bereich zur Goldstein-Singularität kommt. Da diese nicht zu beseitigen ist, sondern vermieden werden muß (s. Kap. 2.2), ist dieser Fall also auszuschließen. Berücksichtigt man noch die lokale Wandkrümmung, so gilt also in einem (x,y)-Koordinatensystem, in dem x der Wandkontur folgt:

Für $Re^{-1}=0$ (Potentialströmung) gelten am Abströmpunkt x_0 als notwendige Bedingung für den ersten Term einer asymptotischen Entwicklung:

$$y_\tau = \frac{(x - x_o)^2}{2R} + \frac{2}{5} c_1 (x - x_o)^{5/2} + \ldots \qquad \text{für } x \to x_o^+ \tag{5.4}$$

$$p - p_o = c_1 (x_o - x)^{3/2} + \ldots \qquad \text{für } x \to x_o^- \tag{5.5}$$

wobei R der örtliche Krümmungsradius ist. Der durch Gl. (5.4), (5.5) beschriebene Sonderfall wird in der Literatur als 'glattes Abströmen' bezeichnet.
Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß mit Gl. (5.5) die Goldstein-Singularität vermieden wird, da vor x_o kein positiver Druckgradient vorhanden ist.

5.1.2. Ein asymptotisches Konzept laminarer Ablösung (Sychev-Theorie)

Der Begriff der 'Strömungsablösung' ist im Rahmen der klassischen Grenzschichttheorie eng mit der Goldstein-Singularität verbunden. Nach dieser Vorstellung löst eine Grenzschicht unter der Wirkung eines aufgeprägten positiven Druckgradienten ab, wenn dieser stark genug ist. An der Ablösestelle bei $\tau_w = 0$ ist durch das Auftreten der Goldstein-Singularität auch das Ende der Grenzschichtrechnung erreicht. Alle Versuche, die Goldstein-Singularität zu beseitigen, sind gescheitert (s. Kap. 2.2).
Sychev [54] machte im Jahr 1972 einen neuen Vorschlag zur Interpretation laminarer Ablösung, der bis heute die einzige Möglichkeit darstellt, laminare Ablösung mit Hilfe einer asymptotischen Entwicklung der Navier-Stokes-Gleichungen zu beschreiben. Zwei wesentliche Punkte charakterisieren diese Theorie:

(I) Die Strömung hat bei $Re^{-1}=0$ kein Druckanstieggebiet vor dem Abströmpunkt x_o und vermeidet damit die Goldstein-Singularität. Es gilt also Gleichung (5.5); glattes Abströmen.

Gemeint ist damit, daß die relevante Euler-Lösung so beschaffen sein muß, daß der Körper zusammen mit dem Ablösegebiet eine effektive Kontur ergibt, die auf dem Körper eine Druckverteilung erzeugt, für die vor dem Abströmpunkt gilt:

$$dp/dx \leq 0.$$

(II) Der Vorgang der Strömungsablösung ist mit einem Druckanstieg in der Außenströmung und damit natürlich auch in der Grenzschicht verbunden. Dieser Ablösungsmechanismus ist aber Re-Zahl-abhängig. Eine asymptotisch kleine Verschiebung des Ablösepunktes x_A aus der Position des glatten Abströmens x_o hat eine asymptotisch kleine Abweichung von der Druckverteilung nach Gl. (5.5) zur Folge. Die Triple-Deck-Theorie ist in der Lage, diese Abweichung in der Druckverteilung als Ergebnis eines (asymptotisch kleinen) Wechselwirkungsprozesses mit der Außenströmung zu beschreiben. Sychev [54] zeigt die Konsistenz der asymptotischen Struktur dieses Wechselwirkungsprozesses. Die Druckverteilung vor dem Ablösepunkt x_A lautet:

$$p - p_A = -\epsilon^{1/2}\bar{c}_0 (x_A - x)^{1/2} + c_1 (x_A - x)^{3/2} + \ldots \quad \text{für} \quad x \to x_A^- \qquad (5.6)$$

wobei $\epsilon^{\frac{1}{2}} = Re^{-\frac{1}{16}}$ ist.

Nur im Grenzfall $Re^{-1}=0$ fallen die beiden Punkte x_A (Ablösepunkt) und x_o (Abströmpunkt) zusammen. Für den Abstand beider Punkte gilt im Rahmen der Sychev-Theorie:

$$x_A - x_o = O(Re^{-1/16}) \qquad (5.7)$$

Eine Analyse der Gleichung (5.6) zeigt, wie das Wechselwirkungsgebiet asymptotisch in das gesamte Strömungsfeld eingepaßt ist. Eine einfache Umformung ergibt:

$$p - p_A = -\epsilon^{1/2}\bar{c}_0 (x_A - x)^{1/2}\left[1 + \frac{c_1}{\bar{c}_0}\frac{(x_A - x)}{\epsilon^{1/2}} + \ldots\right] \qquad (5.8)$$

Da $\bar{c}_0, c_1$ Konstanten der Größenordnung O(1) sind, gilt:

$x_A - x \gg \epsilon^{1/2}$:

In diesem 'Außenbereich' dominieren die Terme $c_1(x_R - x)^{3/2} + \ldots$ gegenüber dem Term $-\epsilon^{1/2}\bar{c}_0(x_R - x)^{1/2}$. Im ganzen Feld ist durch das lokale Geschehen um den Ablösepunkt eine Störung von der Größenordnung $O(Re^{-1/16})$ vorhanden.

$x_A - x = O(\epsilon^{1/2})$:

Die Entwicklung versagt als asymptotische Entwicklung, da beide Terme in (5.8) von gleicher Größenordnung sind. Dies macht eine Sonderbetrachtung dieses Bereiches erforderlich.

$x_A - x \ll \epsilon^{1/2}$:

In diesem 'Innenbereich' dominiert der Term $-\epsilon^{1/2}\bar{c}_0(x_R - x)^{1/2}$ gegenüber allen folgenden Gliedern. Der eigentliche Wechselwirkungsprozeß um x_R erfolgt in einer Triple-Deck-Struktur, also in einem Bereich $(x_R - x) = O(Re^{-3/8})$. Gleichung (5.8) zeigt, daß der erste Term dann wie im Triple-Deck erforderlich von der Größenordnung $O(Re^{-1/4})$ ist. Der zweite Term ist mit $O(Re^{-9/16})$ schon von sehr viel kleinerer Größenordnung und ist deshalb für das Triple-Deck 1.Ordnung irrelevant. Selbst im Triple-Deck 2.Ordnung wäre der Druck nur von der Größenordnung $O(Re^{-6/16})$.

F.T. Smith [44] beschreibt den Wechselwirkungsprozeß um die Ablösestelle x_R mit Hilfe der in Kap. 3.1 beschriebenen Triple-Deck-Theorie unter der Annahme eines (konstanten) Totwasser-Druckes $p_t = p_R = 0$ (Kirchhoff-Strömung, s. Kap. 5.2).

Die durch den 1.Term von Gl. (5.8) gegebene Druckverteilung

$p=-\epsilon^{\frac{1}{2}}\bar{c}_0(x_A-x)^{1/2}$, die bei $x=x_A$ singulär ist, wird durch die Wechselwirkung im Triple-Deck so modifiziert, daß sie regulär bleibt. Sie gilt in unveränderter Form nur außerhalb des Triple-Decks (genauer, für: $\epsilon^{1/2} \gg (x_A-x) \gg \epsilon^3$) und lautet dort in 'lower deck' Koordinaten (s. Tab. 3.3):

$$\boxed{P = -\lambda^{-9/8}\bar{c}_0 |X|^{1/2} \quad \text{für} \quad X \to -\infty} \tag{5.9}$$

F.T. Smith [44] bestimmt die Konstante $\bar{c}_0$ als Eigenwert des Triple-Deck Gleichungssystems zu:

$$\boxed{\bar{c}_0 = 0{,}44\ \lambda^{9/8}} \tag{5.10}$$

Die Konstante c_1 in Gleichung (5.8) ist durch die entsprechende Euler-Lösung($Re^{-1}=0$) bestimmt.
Da eine direkte Kopplung zwischen Druckverteilung für $x<x_A$ und Form der freien Stromlinie für $x>x_A$ besteht (s. Gleichung (5.4), (5.5)) gilt analog zu Gl. (5.8) für die Form der freien Stromlinie (ohne Wandkrümmung):

$$\boxed{y_\tau = \epsilon^{1/2}\frac{2}{3}\bar{c}_0(x-x_A)^{3/2} + \frac{2}{5}c_1(x-x_A)^{5/2} + \ldots \quad \text{für} \quad x>x_A} \tag{5.11}$$

Bild 5.2 soll die Lösungsstruktur um die Ablösestelle x_A noch einmal verdeutlichen:

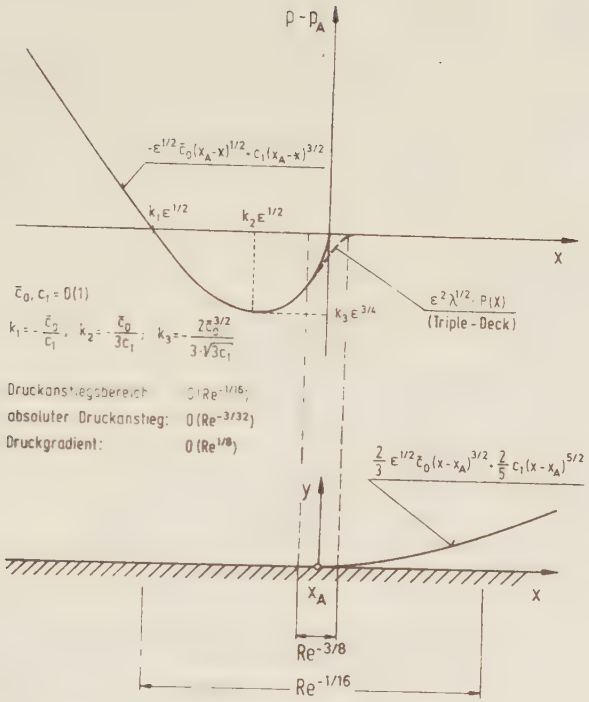


Bild 5.2: Druckverteilung um den Ablösepunkt x_A

5.2. Modellvorstellungen für $Re^{-1}=0$ und ihre Eignung als relevante Euler-Lösung

Der Begriff der relevanten Euler-Lösung wurde in Kap. 2.1 eingeführt und erläutert. Die aus der Definition folgende Vorschrift zur Bestimmung dieser Lösung ist leider unpraktikabel, da dazu die Navier-Stokes-Lösungen für den Grenzübergang $Re^{-1}\to 0$ bekannt sein müßten. Ersatzweise müssen deshalb folgende zwei Kriterien erfüllt sein:

(I) Das untersuchte Modell muß die notwendigen Voraussetzungen aus Kap. 5.1, besonders Gl. (5.4), (5.5) erfüllen (glattes Abströmen für $Re^{-1}=0$).

(II) Das untersuchte Modell muß für $Re^{-1}\to 0$ widerspruchsfrei in eine asymptotische Beschreibung eingepaßt werden können, d.h. insbesondere, daß alle 'matching'-Bedingungen zwischen den einzelnen Teilgebieten des Lösungsfeldes erfüllbar sein müssen.

(5.12)

Die in Kap. 2 vorausgesetzte Eindeutigkeit der Navier-Stokes-Lösungen macht die Kriterien (I) und (II) zu hinreichenden Bedingungen für die relevante Euler-Lösung. Die im folgenden vorgestellten Modelle werden besonders im Hinblick auf die Kriterien (I) und (II) betrachtet. Als einheitliche Modellgeometrie wird der Kreiszylinder gewählt, da die meisten Modellvorstellungen für diese Geometrie ausgearbeitet wurden.

5.2.1. Modell der freien Stromlinien (Kirchhoff)

Bild 5.3 zeigt die von Kirchhoff [32] im Jahr 1869 veröffentlichte Modellvorstellung am Beispiel des Kreiszylinders. Das Strömungsfeld ist in die zwei Gebiete 'Potential-Außenströmung'

und 'Totwassergebiet' eingeteilt. Beide sind durch singuläre freie Stromlinien getrennt. Da der Druck im Totwassergebiet gleich dem Druck p_∞ der ungestörten Anströmung ist, springt die Geschwindigkeit an den freien Stromlinien von dem Wert 0 auf U_∞.

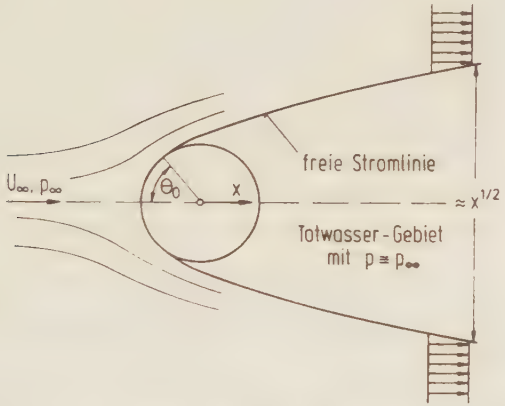


Bild 5.3: Modell der freien Stromlinie nach Kirchhoff

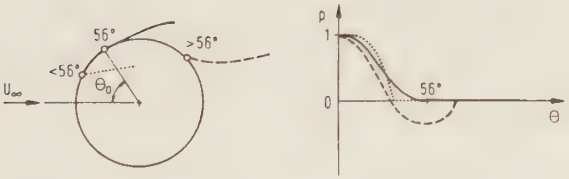


Bild 5.4: Druckverteilung für verschiedene Lagen des Abströmpunktes Θ_0

Die Lage des Abströmpunktes θ_0 ist zunächst ein freier Parameter. Bild 5.4 zeigt den Verlauf der Druckverteilung für verschiedene Lagen von θ_0:

$\theta_0 < 56°$: Die freie Stromlinie schneidet den Körper. Diese Fälle müssen also ausgeschlossen werden.

$\theta_0 = 56°$: Die Stromlinie verläßt die Wand mit der körpereigenen Krümmung. Der entsprechende Druckverlauf zeigt, daß es sich um den Fall des 'glatten Abströmens' handelt.

$\theta_0 > 56°$: Die Krümmung der freien Stromlinie bei θ_0 ist unendlich groß. Der Druckverlauf singulär (vertikale Tangente bei θ).

Kriterium (I) ist für den Fall des glatten Abströmens bei $\theta_0 = 56°$ erfüllt.

Kriterium (II) kann endgültig erst dann überprüft werden, wenn die Erweiterung um Effekte endlicher Re-Zahlen erfolgt. Bezüglich dieser Erweiterungsmöglichkeiten ergeben sich allerdings ernsthafte Bedenken:

⟶ Die freien Stromlinien haben einen Abstand $\approx x^{\frac{4}{7}}$ für $x \to \infty$, d.h. das Ablösegebiet ist im Unendlichen nicht geschlossen (was zu einem Widerstandsbeiwert $c_D > 0$ für $Re^{-1} = 0$ führt). Diese Strömung kann somit nicht der Grenzfall $Re^{-1} = 0$ der Navier-Stokes-Gleichungen mit homogenen Randbedingungen im Unendlichen sein. Die Randbedingung für $x \to \infty$ müßte vielmehr lauten:

$$u = \alpha(Re)\, a_1 \quad \text{für} \quad |y| < a_2 x^{1/2} \quad , \text{mit: } a_1, a_2 = \text{konst} \quad , \quad \lim_{Re^{-1} \to 0} \alpha = 0$$

→ Da das Rückströmgebiet hinter dem Kreiszylinder für endliche Re-Zahlen eine endliche Länge haben muß (Navier-Stokes-Rechnungen zeigen Längen $\approx$Re für $Re_D < 100$, s. z.B. Dennis, Chang [19]) bedeutet dies, daß es durch die Effekte endlicher Re-Zahlen zu einem grundsätzlichen Sprung im Strömungscharakter, besonders bei den Randbedingungen stromabwärts kommen müßte.

Alle Versuche, dieses reibungslose Modell als Grundlösung für $Re^{-1}=0$ zu modifizieren (z.B. Woods [58], Roshko [41]) ändern nichts an den grundsätzlichen Einwänden. Das Modell kann die lokalen Verhältnisse zufriedenstellend beschreiben (glattes Abströmen) nicht aber das Strömungsverhalten für große Körperabstände. Aus diesem Grunde liegt es nahe, nur den körpernahen Bereich zu verwenden und für das Fernfeld eine andere Modellvorstellung zu wählen.

5.2.2. Sychev/Smith-Theorie

Sychev [53] machte 1967 den Vorschlag, die Kirchhoff-Lösung als lokal gültige Lösung (in Körperabmessungen) in ein Modell zu übernehmen, in dem das Ablösegebiet von der Länge O(Re) und der Breite $O(Re^{1/2})$ ist.
Mit der Annahme Re-Zahl proportionaler Länge des Ablösegebietes, die auch in einer Reihe anderer Modellvorstellungen Anwendung findet, wird implizit eine weitreichende Aussage gemacht:
Es existiert keine reibungslose Grundströmung, die dann im Rahmen der asymptotischen Theorie als Störungsrechnung für endliche Re-Zahlen modifiziert werden könnte. Vielmehr existiert das Fernfeld in einer 'Wechselwirkung' zwischen reibungsloser und reibungsbehafteter Strömung, die allerdings nicht explizit formuliert wird, sondern deren Ergebnis eben als Re-abhängige Abmessungen des Ablösegebietes Anwendung findet.
F.T. Smith [45] hat das von Sychev vorgeschlagene Konzept weiter ausgearbeitet und insbesondere um die asymptotische Beschreibung der Strömung in Körpernähe erweitert. Das Modell be-

schreibt die Strömung im wesentlichen in zwei verschiedenen Maßstäben:

(1) im Körpermaßstab ('body scale flow'); hier sind typische Abmessungen von der Größenordnung O(1), also z.B. von der Größenordnung des Zylinderdurchmessers. Dies ist der Bereich der durch Effekte endlicher Re-Zahlen erweiterten Kichhoff-Strömung.

(2) im Maßstab des Ablösegebietes ('eddy scale flow'); hier sind typische Abmessungen von der Größenordnung $O(Re)$ bzw. $O(Re^{1/2})$.

Für Einzelheiten dieses sehr komplizierten Strömungsmodells sei auf die jeweiligen Originalarbeiten [53] bzw. [45] verwiesen.
Für die Beurteilung anhand der eingangs, s.(5.12), aufgestellten Kriterien zur Auswahl der relevanten Euler-Lösung ergibt sich folgendes Bild:

Kriterium (I) ist durch die Kirchhoff-Strömung mit der Nebenbedingung glatten Abströmens sichergestellt.

Kriterium (II) ist noch nicht vollständig erfüllt, da insbesondere in der Umgebung des Wiederanlegepunktes der asymptotische Charakter der Strömung ungeklärt ist. Soweit das Modell bis heute ausgearbeitet werden konnte, erlaubt es eine widerspruchsfreie, asymptotische Beschreibung der Strömung.

5.2.3. Das Batchelor-Modell

Diese Modellvorstellung geht von der Existenz einer reibungslosen Grundlösung für $Re^{-1}=0$ aus und ist durch die physikalischen Vorgänge motiviert, denen eine Strömung im Grenzübergang $\nu \to 0$ (und somit $Re^{-1} \to 0$) unterliegt. Batchelor [3,4] analysiert das Verhalten einer reibungsbehafteten Strömung in einem geschlossenen Rückströmgebiet, die dem doppelten Grenzübergang $t^{-1} \to 0$ ($t \hat{=}$ Zeit) , $\nu \to 0$ unterliegt. Batchelor kann zeigen, daß

in diesem Grenzfall die Drehung der Strömung nicht nur längs geschlossener Stromlinien, sondern auch quer zu ihnen konstant sein muß. Das heißt aber, daß das Rückströmgebiet eine Strömung konstanter Drehung (ω_o) enthält. Bild 5.5 zeigt die Anwendung auf den Kreiszylinder.

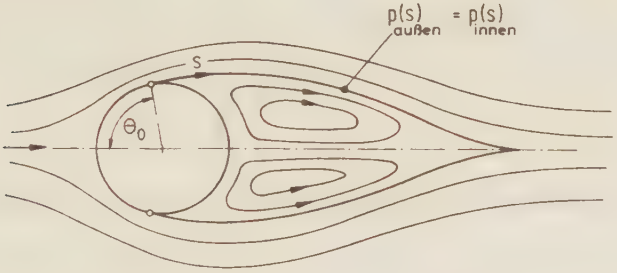


Bild 5.5: Batchelor-Modell am Kreiszylinder

Das Innengebiet konstanter Drehung ist durch singuläre Stromlinien (Sprung in der Geschwindigkeit) von der Potentialströmung im Außengebiet getrennt. Innen- und Außenströmung sind Gebiete unterschiedlichen Gesamtdruckes. Da der statische Druck auf beiden Seiten der Trennstromlinien gleich ist (Druckbedingung), folgt für den Sprung im Gesamtdruck zwischen dem Rand des Innengebietes und dem Außengebiet unmittelbar:

$$h = \frac{1}{2}\left(w_{r,a}^2 - w_{r,i}^2 \right) \qquad (5.13)$$

$w_{T,a}$ bzw. $w_{T,i}$ sind dabei die Geschwindigkeiten auf der Trennstromlinie als Werte auf dem Rand des jeweiligen Lösungsgebietes. Freie Parameter dieses Modells sind:

(1) die Drehungsstärke im Innengebiet, ω_o

(2) die Lage des Abströmpunktes θ_o.

Es ist ein Ziel dieser Arbeit, das Batchelor-Modell auf seine Tauglichkeit als rationales Strömungsmodell zu untersuchen. Im folgenden soll dies am Beispiel der Dellengeometrie erfolgen.

5.2. Anwendung des Batchelor-Modells auf die Dellengeometrie

Folgende Argumente lassen es sinnvoll erscheinen, das Batchelor-Modell auf seine Tauglichkeit als Grundlösung einer asymptotischen Theorie zu untersuchen:

(a) anders als am Kreiszylinder ist die Größe des Ablösegebietes durch die Dellengeometrie auf Abmessungen von der Größenordnung $O(1)$ begrenzt. Das Batchelor-Modell hat für endliche Drehung im Innengebiet, $\omega_o \neq 0$, ein Rückströmgebiet dieser Größenordnung.

(b) die Vorstellung, daß eine stationär rezirkulierende Strömung im Grenzfall $\nu \to 0$ eine von Null verschiedene konstante Drehung ausbildet, ist physikalisch wohl begründet; s. Batchelor [3].

(c) Navier-Stokes-Lösungen der sog. 'cavity'-Strömung zeigen für steigende Re-Zahlen die Tendenz zur Ausbildung einer Kernströmung mit nahezu konstanter Drehung, wie z.B. Bild 5.6 zeigt. Das einer Arbeit von Burggraf [8] entnommene Beispiel zeigt die Drehungsverteilung über den Mittelschnitt der 'cavity'-Geometrie für drei verschiedene Re-Zahlen.

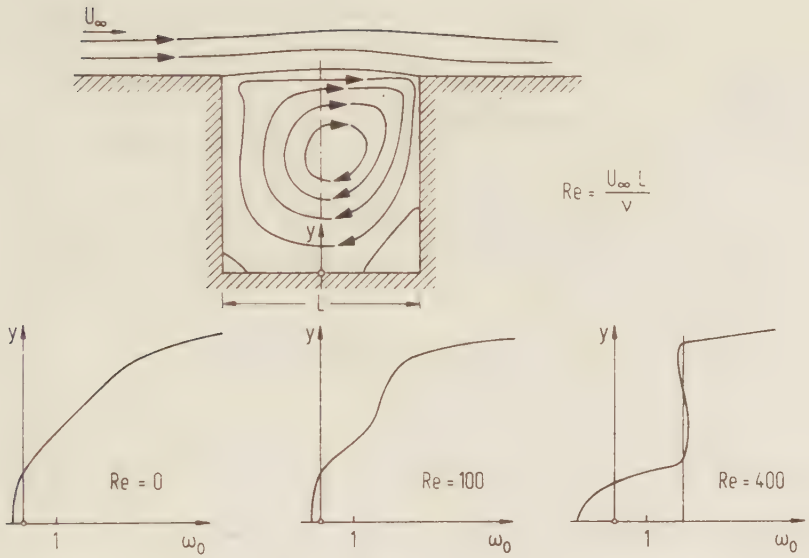


Bild 5.6: Drehungsverteilung im Mittelschnitt einer 'cavity'-Strömung (Navier-Stokes-Lösung , Burggraf [8])

5.3.1. Mathematische Formulierung

Bild 5.7 zeigt die Anwendung des Batchelor-Modells auf die Dellengeometrie. Dabei bezeichnet y_K^* die Wandkontur, y_T^* die Trennstromlinie zwischen Innen- und Außengebiet, S_o den Abström-, R_o den Wiederanlegepunkt.
Im Außengebiet gilt die Potentialströmung:

$$\frac{\partial^2 \psi_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial y^2} = 0 \qquad (5.14)$$

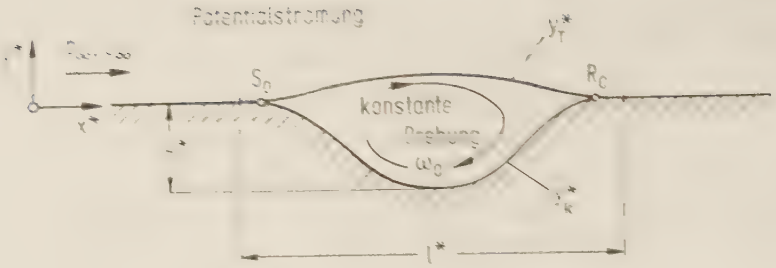


Bild 6.7: Batchelor-Modell an der Dellengeometrie

mit den Randbedingungen :

$$\Psi_a = y \qquad \text{für} \qquad x \to -\infty$$

$$\Psi_a = 0 \qquad \text{für} \qquad y = y_T$$

Dabei finden folgende dimensionslose Größen Verwendung (Index 'a' = außen):

x	y	u_a	v_a	w_a	p_a	Ψ_a
$\frac{x^*}{l^*}$	$\frac{y^*}{l^*}$	$\frac{u_a^*}{U_\infty}$	$\frac{v_a^*}{U_\infty}$	$\frac{(u_a^{*2}+v_a^{*2})^{1/2}}{U_\infty}$	$\frac{p_a^*-p_\infty}{\rho U_\infty^2}$	$\frac{\Psi_a^*}{l^* U_\infty}$

Tabelle 6.1: Dimensionslose Größen im Außengebiet

Für schwache Auslenkungen der Kurve y_T ist die in den Randbedingungen linearisierte Form der Laplace-Gleichung für Ψ_a eine sehr gute Näherung (thin airfoil theory). Dies führt auf das bereits in Kap. 3 verwendete Hilbert-Integral für die Druck-

verteilung p_a auf der Trennstromlinie y_T:

$$p_{Ta}(x) = \frac{1}{2}\left(1 - w_{Ta}^2\right) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,y_{T\kappa}/d\bar{x}}{x-\bar{x}}\,d\bar{x} \qquad (5.15)$$

$y_{T\kappa}$ ist dabei links von S_o und rechts von R_o (s. Bild 5.7, identisch mit y_κ, zwischen S_o und R_o gleich y_T.
Das Innengebiet ist beschrieben durch die Poisson-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} = -\omega_o = \text{konst} \qquad (5.16)$$

mit den Randbedingungen $\psi_i = 0$ auf y_T und y_κ. Dabei ist ω definiert als:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (5.17)$$

d.h. der positive Drehsinn ist gegen den Uhrzeigersinn gerichtet. Die dimensionslosen Größen sind Tabelle 5.4 zu entnehmen (Index 'i' = innen).

x	y	u_i	v_i	w_i	p_i	ψ_i	ω_o
$\frac{x^*}{l^*}$	$\frac{y^*}{l^*}$	$\frac{u_i^*}{U_\infty}$	$\frac{v_i^*}{U_\infty}$	$\frac{(u_i^{*2} + v_i^{*2})^{1/2}}{U_\infty}$	$\frac{p_{is}^* - p_i^*}{\rho U_\infty^2}$	$\frac{\psi_i^*}{l^* U_\infty}$	$\frac{\omega_o^* l^*}{U_\infty}$

Tabelle 5.4: Dimensionslose Größen im Innengebiet

Der dimensionslose Druck im Innengebiet ist mit der Differenz zum Gesamtdruck auf dem Rand gebildet. Der Gesamtdruck ist im Innengebiet eine lineare Funktion von Ψ_i und hat auf dem Rand den Wert des statischen Druckes im Staupunkt bei S_o, $p^*_{i,s}$ (s. Bild 5.7). Aufgrund der Druckbedingung:

$$\boxed{p_i^* = p_a^* \quad \text{auf} \quad y_T^*} \tag{5.18}$$

ist der Gesamtdruck im Innengebiet gleich dem statischen Druck im Außengebiet an der Stelle S_o. Der Sprung im Gesamtdruck zwischen Innen- und Außengebiet, h, ist damit:

$$\boxed{h \equiv \frac{h^*}{\rho U_\infty^2} = \frac{1}{2}\left(w_{T,a}^2 - w_{T,i}^2\right) = \frac{1}{2} w_{T,a}(S_o)} \tag{5.19}$$

Für schlanke Innengebiete läßt sich nach einem Vorschlag von Childress [15] auf folgende Weise eine Näherungslösung finden:
Der in Kap. 2.3.4 gebildete, dimensionslose Parameter $\varkappa_H = H^*/l^*$ ist ein Maß für die 'Schlankheit' des Innengebietes. Gleichung (5.16) lautet unter der Transformation nach Tabelle 5.5:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_i}{\partial \tilde{y}^2} + \varkappa_H^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_i}{\partial \tilde{x}^2} = -\tilde{\omega}_o} \tag{5.20}$$

$\tilde{x}$	$\tilde{y}$	$\tilde{u}_i$	$\tilde{v}_i$	$\tilde{p}_i$	$\tilde{\Psi}_i$	$\tilde{\omega}_o$	$\tilde{h}$
x	$\frac{y}{\varkappa_H}$	$\frac{u_i}{\varkappa_H^{1/2}}$	$\frac{v_i}{\varkappa_H^{3/2}}$	$\frac{p_i}{\varkappa_H}$	$\frac{\Psi_i}{\varkappa_H^{3/2}}$	$\frac{\omega_o}{\varkappa_H^{-1/2}}$	$\frac{h}{\varkappa_H}$

Tabelle 5.5: Childress-Transformation für schlanke Poisson-Gebiete

Für $\varkappa_H \to 0$ lautet eine Näherungslösung also

$$\boxed{\frac{\partial^2 \tilde{\psi}_i}{\partial \tilde{y}^2} = -\tilde{\omega}_o + O(\varkappa_H^2)} \qquad (5.21)$$

mit $\tilde{\psi}_i = 0$ auf dem Rand des Lösungsgebietes. Physikalisch bedeutet die Näherung (5.21) die Vernachlässigung der v-Komponente der Innenströmung, also die Näherung $w_i = u_i$. Gleichung (5.21) ist zweimal integrierbar und ergibt unter Berücksichtigung der Randbedingung:

$$\boxed{\tilde{\psi}_i(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\frac{\tilde{\omega}_o}{2}\left[\tilde{y}^2 - \tilde{y}(\tilde{y}_K + \tilde{y}_T) + \tilde{y}_K \tilde{y}_T\right]} \qquad (5.22)$$

Damit gilt: $\tilde{u}_i(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\tilde{\omega}_o\left[\tilde{y} - \frac{1}{2}(\tilde{y}_K + \tilde{y}_T)\right]$ und wegen $\tilde{p}_{T,i} = \frac{1}{2}\tilde{u}_{T,i}^2$ für den Druck auf der Trennstromlinie:

$$\boxed{\tilde{p}_{T,i} = \frac{\tilde{\omega}_o^2}{8}\left(\tilde{y}_T - \tilde{y}_K\right)^2} \qquad (5.23)$$

Eine vollständig linearisierte Fassung des Gesamtproblems erhält man, wenn die linearisierte Fassung der Außenlösung der gleichen Transformation wie die Innenlösung unterworfen wird. Tabelle 5.6 zeigt die entsprechenden, transformierten Größen.

$\tilde{x}$	$\tilde{y}$	$\tilde{w}_a$	$\tilde{p}_a$	$\tilde{\psi}_a$
x	$\frac{y}{\varkappa_H}$	$\frac{w_a}{\varkappa_H^{3/2}}$	$\frac{p_a}{\varkappa_H}$	$\frac{\psi_a}{\varkappa_H^{3/2}}$

Tabelle 5.6:
Childress-Transformation des Außengebietes

Gleichung (5.15) lautet dann:

$$\tilde{p}_{T,a} = \frac{1}{2}\left(\varkappa_M^{-1} - \tilde{w}_{T,a}^2 \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,\tilde{y}_{TK}/d\bar{x}}{x - \bar{x}}\, d\bar{x} \qquad (5.24)$$

Die Druckbedingung (5.18) lautet nach einfacher Umformung:

$$\tilde{p}_{T,a} + \tilde{p}_{T,i} = \tilde{p}_{T,a}(S_o) = \text{konst.} \quad \text{auf} \quad \tilde{y}_T \qquad (5.25)$$

Gleichung (5.23) und (5.24) eingesetzt in Gl. (5.25) ergibt damit eine Bestimmungsgleichung für $\tilde{y}_T$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x(S_o)} \frac{d\tilde{y}_K/d\bar{x}}{x - \bar{x}}\, d\bar{x} + \frac{1}{\pi} \int_{x(S_o)}^{x(R_o)} \frac{d\tilde{y}_T/d\bar{x}}{x - \bar{x}}\, d\bar{x} + \frac{1}{\pi} \int_{x(R_o)}^{\infty} \frac{d\tilde{y}_K/d\bar{x}}{x - \bar{x}}\, d\bar{x} - \frac{\tilde{\omega}_o^2}{8} \left[\tilde{y}_T - \tilde{y}_K \right]^2 = -\tilde{p}_{T,a}(S_o) \qquad (5$$

Gleichung (5.26) ist eine nichtlineare, singuläre Differential-Integral-Gleichung zur Bestimmung von $\tilde{y}_T$ in $[\, x(S_o)\,,\, x(R_o)\,]$, die allerdings nicht direkt, sondern über ein numerisches Iterationsverfahren gelöst werden soll, das im nächsten Kapitel vorgestellt wird.
Bei der Untersuchung des Modells ist die Frage nach der Eindeutigkeit von entscheidender Bedeutung. Wie bereits in Kap. 5.2.3 erwähnt, hat das Batchelor-Modell zwei freie Parameter:

- die Drehungsstärke im Innengebiet , ω_o
- die Lage des Abströmpunktes S_o.

Gleichzeitig existieren zwei Bedingungen, die erfüllt sein müssen:

— Gleichungen (5.4), (5.5) müssen erfüllt sein ('glattes Abströmen').

— Die im Innengebiet umlaufende Grenzschicht muß periodisch sein.

Die zweite Bedingung meint folgendes: Im Grenzfall $Re^{-1} \to 0$ bilden sich längs der singulären Stromlinien (hier längs y_K bzw. y_T) asymptotisch kleine Scherschichten aus (Wandgrenzschicht bzw. freie Scherschicht). Da es sich um ein stationäres Strömungsmodell handelt, muß die Scherschicht nach einem Umlauf wieder mit dem 'Startprofil' ankommen.
Es ist also hier zur Bestimmung der reibungslosen Grundströmung eine Grenzschichtrechnung erforderlich.

5.3.2. Numerisches Lösungsverfahren

Ein numerisches Lösungsverfahren für das durch Gleichung (5.26) beschriebene Problem muß folgende drei Elemente enthalten:

(a) Lösungsverfahren für die Außenströmung (Laplace-Gleichung)

(b) Lösungsverfahren für die Innenströmung (Poisson-Gleichung)

(c) Iterationsvorschrift zur Bestimmung der Funktion $y_T|_{i+1}$ aus einer Rechnung mit $y_T|_i$.

Für die vollständig linearisierte Fassung stehen Gleichung (5.15) für Punkt (a) und Gleichung (5.23) für Punkt (b) zur Verfügung.
Die Iterationsvorschrift, Punkt (c), muß so gestaltet sein, daß sie eine schrittweise Annäherung an die endgültige Lösung y_T erlaubt. y_T ist derjenige Verlauf der Trennstromlinie, der die Druckbedingung, Gleichung (5.18), erfüllt.
Der Grundgedanke des gewählten Verfahrens ist folgender:
Eine Strömung, die Lösung der Euler-Gleichungen ist, kann durch ein Singularitätenmodell beschrieben werden. Die Singularitä-

ten sind dabei in der Regel auf singulären Stromlinien angeordnet. An einer festen Wand z.B. ergibt sich eine Wirbelverteilung, deren Betrag dem Geschwindigkeitssprung von der Geschwindigkeit an der Wand auf den Wert Null entspricht. Längs freier Stromlinien mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten zu beiden Seiten entspricht der Betrag der Wirbelstärke dem Geschwindigkeitssprung an der freien Stromlinie. Neben einer Singularitäten-Verteilung (hier: Wirbel~) auf freien und Wandstromlinien, gibt es im hier betrachteten Fall eine flächenmäßig verteilte Drehung im Innengebiet, deren Induktion im Singularitätenmodell mit zu berücksichtigen ist. Die Berücksichtigung aller Singularitäten erlaubt es, die Geschwindigkeit w an jeder Stelle des Strömungsfeldes aus den Induktionen aller Singularitäten zu ermitteln.
Auf der Trennstromlinie gilt auf Grund der Druckbedingung, s. Gl. (5.19):

$$w_{T,a}^2(S_o) = w_{T,a}^2 - w_{T,i}^2$$

Daraus läßt sich durch einfache Umformung ein Ausdruck für die Wirbelverteilung auf der Trennstromlinie, nämlich für $-\gamma = (w_{T,a} - w_{T,i})$, bilden:

$$-\gamma = \frac{w_{T,a}^2(S_o)}{w_{T,i} + \sqrt{w_{T,a}^2(S_o) + w_{T,i}^2}} \qquad (5.27)$$

$-\gamma$ ist also die für die endgültige Lösung γ_T geforderte Wirbelverteilung, da diese aus der Druckbedingung folgt.
Der Iterationsprozeß läuft damit folgendermaßen ab:

(1) Willkürliche Vorgabe einer Funktion $\gamma_T|_i$; damit Berechnung der Innen- und Außenströmung; Ergebnis: $w_{T,a}|_i$ und $w_{T,i}|_i$.

(2) Ersetzen der vorhandenen Wirbelbelegung auf der Trennstromlinie (nämlich: $(w_{T,a}-w_{T,i})|_i$) durch $-\gamma$ aus Gleichung (5.27).

(3) Mit dieser Wirbelbelegung und allen anderen Singularitäten des Feldes Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten $u_{T,a}|_i$ und $v_{T,a}|_i$; auf $y_T|_i$.

(4) Bestimmung einer neuen Funktion $y_T|_{i+1}$ durch Integration mit: $dy_T|_{i+1}/dx = v_{T,a}|_i / u_{T,a}|_i$

dann erneute Berechnung der Innen- und Außenströmung.

Die Schritte (2) bis (4) sind zu wiederholen, bis die Differenz zweier aufeinander folgender y_T-Werte hinreichend klein ist.
Die Erfassung der flächenmäßig verteilten Wirbelbelegung im Innengebiet wurde dabei unter Zuhilfenahme des Satzes von Stokes erreicht:

$$\oint \vec{w}\, d\vec{s} = 2 \iint_A \omega \, dA \qquad (5.28)$$

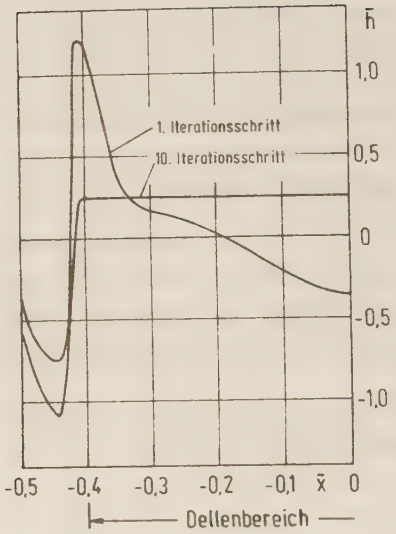
's' ist die Koordinate längs des geschlossenen Randes der Fläche A, w die Geschwindigkeit auf dem Rand, ω die Drehung auf der Fläche A.
Mit Hilfe von Gl. (5.28) wird also die ω_o-Verteilung im Innengebiet durch eine äquivalente Randbelegung γ_o ersetzt.
Bild 5.8 zeigt das Konvergenzverhalten des beschriebenen Iterationsprozesses für ein Beispiel aus Kap. 5.5. Aufgetragen ist die Größe $\bar{h}$ als:

$$\bar{h} \equiv \frac{1/2 - h^*/(\rho U_\infty^2)}{\varkappa_H} = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-w_{T,a}^2)}{\varkappa_H} + \tilde{w}_{T,i}^2\right] = \tilde{p}_{T,a} + \tilde{p}_{T,i} \qquad (5.29)$$

Bild 5.3:

Konvergenzverhalten bei der Bestimmung der freien Stromlinie $\tilde{y}_T$

(S_o bei $\tilde{x}=-0.4$, $\tilde{\omega}_o=-2.0$)



Diese Auftragung wird gewählt, weil für den Spezialfall $w_{T,a}=1$, $w_{T,i}=0$ gilt: $\bar{h}=0$, $\tilde{h}\equiv\frac{h}{\varkappa_H}$ wäre dann aber $(2\varkappa_H)^{-1}$ und somit für $\varkappa_H\to 0$ keine Größe von der Größenordnung O(1).

$\bar{h}$ muß auf der gesuchten freien Stromlinie konstant sein. Die willkürliche Wahl von $y_T|_1$ im ersten Iterationsschritt erfüllt diese Bedingung nicht. Nach etwa 10 Iterationen ist eine befriedigend genaue Erfüllung der Bedingung $\bar{h}$ = const. erreicht, wie Bild 5.8 zeigt.

5.3.3. Ergebnisse

Das Ziel der Rechnungen ist es, die Tauglichkeit des Batchelor-Modells als relevante Euler-Lösung zu untersuchen. Die Kriterien (I) und (II), s. (5.12), sind für sich genommen jeweils notwendige Voraussetzungen, wobei Kriterium (I) (glattes Abströmen) von der reibungslosen Grundlösung ($Re^{-1} = 0$) zu erfüllen ist. Dieses Kriterium soll zunächst herangezogen werden, da sich bei Nichterfüllen von (I) eine weitere Untersuchung bezüglich (II) erübrigt.
Es sollen zunächst die beiden Parameter 'ω_o' und 'Lage von S_o' unabhängig voneinander variiert werden. Während im weiteren das Hauptaugenmerk auf die Druckverteilung um den Abströmpunkt S_o gerichtet wird, zeigt Bild 5.9 zunächst einmal das Gesamtbild. Die Kontur nach Gleichung (2.8) lautet jetzt (linearisierte Fassung):

$$\boxed{\tilde{y}_K = -\frac{1}{4}\left\{\cos 2\pi\left[\tilde{x}+\frac{1}{2}\right]-1\right\}^2 \quad ; -\frac{1}{2} \le \tilde{x} \le \frac{1}{2}} \qquad (5.30)$$

Bild 5.9 ($\tilde{\omega}_o = -3.0$, S_o bei $\tilde{x} = -1/2$) zeigt die für diese Fälle typische Auslenkung der Trennstromlinie, die erforderlich ist, damit die dadurch erhöhte Außengeschwindigkeit die von Null verschiedene Innengeschwindigkeit zu einem längs $\tilde{y}_T$ konstanten Wert $\bar{h}$ (s. Gl. (5.19)) kompensieren kann. Die drei Kurven $\tilde{p}_{T,a}$, $\tilde{p}_{T,i}$ und $\bar{h}$ sind über Gleichung (5.29) verknüpft als $\bar{h} = \tilde{p}_{T,a} + \tilde{p}_{T,i}$. Die in diesem Beispiel auftretenden Geschwindigkeiten sind bei $\tilde{x} = 0$ zu beiden Seiten der Trennstromlinie:

$$\frac{w_{T,a}^2(0) - 1}{\varkappa_H} = 2.163 \qquad \tilde{w}_{T,i}(0) = 1.623$$

Da diese Theorie für $\varkappa_H \to 0$ gilt, ist mit einer Lösung eine Näherungslösung für alle kleinen Werte $\varkappa_H$ gefunden. Tabelle 5.7 gibt die Zahlenwerte für eine Reihe von $\varkappa_H$-Werten an:

$\varkappa_H$	$w_{T,a}(0)$	$w_{T,i}(0)$
0.0	1.0	0.0
0.01	1.011	0.162
0.1	1.103	0.513
0.2	1.197	0.726

Tabelle 5.7:

Beispiele aus der Lösungsmannigfaltigkeit einer linearisierten Lösung ;
$\tilde{\omega}_o$=-3.0 , S_o bei $\tilde{x}$=-0.5

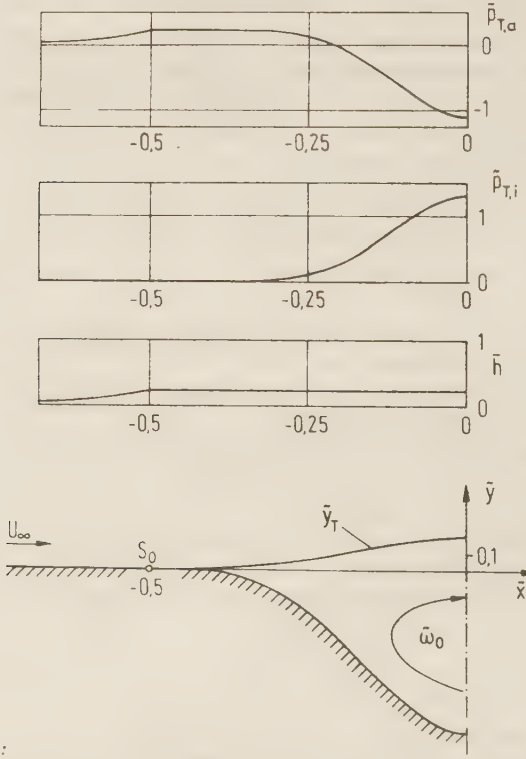


Bild 5.9:

Batchelor-Modell an der Dellengeometrie
für: $\tilde{\omega}_o$=-3.0
S_o bei $\tilde{x}$=-0.5 (Dellenbeginn)

Das Beispiel $\varkappa_H=0.1$ zeigt, daß für eine relativ geringe Auslenkung der Trennstromlinie (s. Bild 5.9) Innengeschwindigkeiten von nahezu 50% der Außenwerte erforderlich sind. Dies läßt die qualitative Aussage zu, daß geringe Geschwindigkeiten im Innengebiet einen kaum merkbaren Einfluß auf die Form der Berandung haben. Wenn dies so ist, dann wird die Form des Ablösegebietes nicht wesentlich von der des Totwasser-Falles ($\tilde{\omega}_o \equiv 0$) abweichen. Diese Aussage wird sich im folgenden bestätigen.

Die Theorie liefert zwar für beliebig kleine Werte von $\varkappa_H$ (Näherungs-) Lösungen, es ist aber zu beachten, daß nur Werte oberhalb eines von Null verschiedenen Wertes physikalisch sinnvoll sind, und zwar aus folgendem Grund:

$\varkappa_H \to 0$ bedeutet physikalisch, daß die relative Dellentiefe zu Null geht. Bei einem bestimmten endlichen Wert ist die Delle aber so flach, daß keine Ablösung auftritt. Dieser Grenzwert sei mit $\varkappa_{H\beta}$ bezeichnet und kann durch eine Grenzschichtrechnung bestimmt werden. $\varkappa_{H\beta}$ ist der Wert $\varkappa_H$, bei dem die Prandtl'sche Grenzschicht (1.Ordnung, da für $\varkappa \to 0$ (s. Gl. (2.15)) keine Wechselwirkung berücksichtigt zu werden braucht) gerade <u>nicht</u> auf die Goldstein-Singularität führt. $\varkappa_{H\beta}$ ist selbstverständlich abhängig von der Lage der Plattenvorderkante ($\varkappa_L$). Folgendes Vorgehen führt zur Bestimmung von $\varkappa_{H\beta}$:

- Die Druckverteilung über die <u>Wand</u>geometrie wird bestimmt als: $\tilde{p}(\tilde{x}) = p(x)/\varkappa_H$
- Für eine feste Lage der Plattenvorderkante wird eine Prandtl'sche Grenzschichtrechnung mit der Druckverteilung $p(x) = \varkappa_H \tilde{p}(x)$ durchgeführt und $\varkappa_H$ so lange erhöht, bis zum ersten Mal die Goldstein-Singularität auftritt.
- Die Rechnung wird für andere Lagen der Plattenvorderkante, also für andere Werte $\varkappa_L$, wiederholt.

Bild 5.10 zeigt die Druckverteilung $\tilde{p}(\tilde{x})$. Die Goldstein-Singularität tritt für $\varkappa_L = L^*/l^* = 2.5$ zum ersten Mal auf bei

$$\varkappa_{HR}(\varkappa_L = 2.5) = 3 \cdot 10^{-3} \pm 10^{-4}$$

Die Lage der Goldstein-Singularität ist in Bild 5.10 mit 'G' gekennzeichnet.
Eine Alternative zu diesem recht aufwendigen Verfahren zur Bestimmung von $\varkappa_{HR}$ besteht in der Verwendung eines Ablösungskriteriums. Dazu wurde das sog. Stratford-Kriterium (s. z.B. Curle & Davis [17]) herangezogen. Unter Verwendung der Druckverteilung nach Bild 5.10 kann eine explizite Beziehung für $\varkappa_{HR}$ hergeleitet werden, als:

$$\varkappa_{HR} = \min\left\{\left[\frac{1.3 \cdot 10^{-3}}{\tilde{x}_s^2\, \tilde{p}_s\, (d\tilde{p}_s/d\tilde{x})^2}\right]^{1/3}\right\} \qquad (5.31)$$

wobei gilt: $\tilde{x}_s = \tilde{x} + \varkappa_L + 1/2$

$$\tilde{p}_s = \tilde{p} - \tilde{p}_{min}$$

Gleichung (5.31) ergibt: $\varkappa_{HR}(\varkappa_L = 2.5) = 3.33 \cdot 10^{-3}$ bei $\tilde{x} = -0.125$, was bis auf etwa 10% mit dem Ergebnis der aufwendigen Grenzschichtrechnung übereinstimmt.

Ein größerer Abstand zur Vorderkante ergibt erwartungsgemäß einen verminderten Wert für $\varkappa_{HR}$, es gilt z.B.:

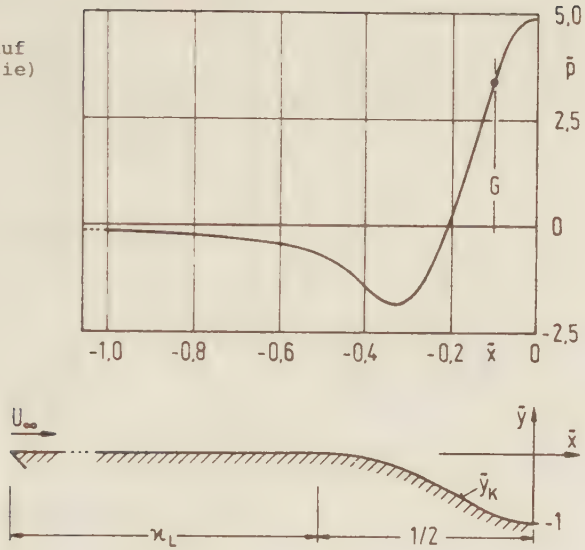
$$\varkappa_{HR}(\varkappa_L = 5.0) = 2.19 \cdot 10^{-3}$$

Zur Überprüfung des Kriteriums (I) wurden zunächst folgende Fälle von Parameterkombinationen näher untersucht:

Tabelle 5.3:
Parameter-Kombinationen der Beispielrechnungen

$\tilde{\omega}_o$ \ Δs	- 0.09	0.0	0.025
- 1.0		X	
- 3.0	X	X	X

Bild 5.10:
Druckverteilung auf $\tilde{Y}_K$ (Potentialtheorie)



Δs bezeichnet dabei die Lage des Abströmpunktes und zählt von der Stelle des Dellenbeginns. Negatives Δs bedeutet somit Abströmen vor Dellenbeginn, positives Δs entsprechend ein Abströmen innerhalb des Dellenbereiches. Da die Druckverteilung um S_o entscheidend ist, zeigen die Bilder 5.11-5.14 nur diesen Ausschnitt.

Im Hinblick auf Kriterium (I) wird eine Druckverteilung vom '$n=\frac{5}{2}$-Typ' gesucht (s. Tab. 5.2), also mit der notwendigen Bedingung $d\tilde{p}/d\tilde{x}=0$ bei S_o^-. Die in den Bildern 5.11-5.14 gezeigten Beispiele zeigen aber alle den für den '$n=\frac{3}{2}$-Typ' charakteristischen Druckverlauf. Eine nähere Untersuchung am Beispiel aus Bild 5.13 ergibt für den Verlauf der freien Stromlinie: $\tilde{y}_\tau \approx \tilde{x}^{1.47}$ (s. Bild 5.15) und für die Druckverteilung vor S_o: $\tilde{p}-\tilde{p}(S_o) \approx (-\tilde{x})^{0.5}$ (s. Bild 5.16) wie dies für den '$n=\frac{3}{2}$-Typ' nach Tabelle 5.2 zu erwarten ist.

Bild 5.11:
Druckverteilung um S_o
$\tilde{\omega}_o = -3.0$, $\Delta s = 0.0$

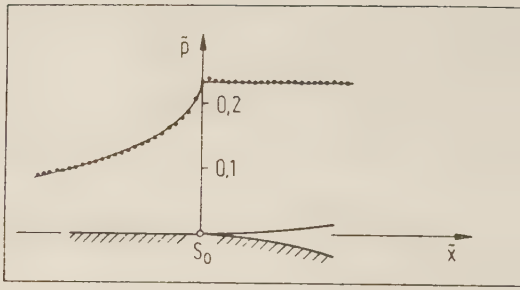
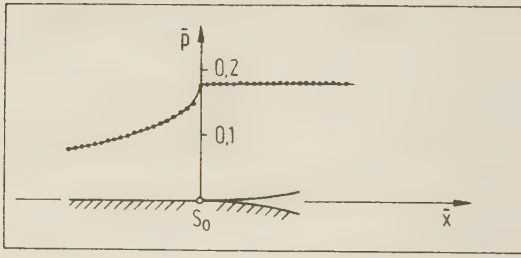


Bild 5.12:
Druckverteilung um S_o
$\tilde{\omega}_o = -1.0$, $\Delta s = 0.0$



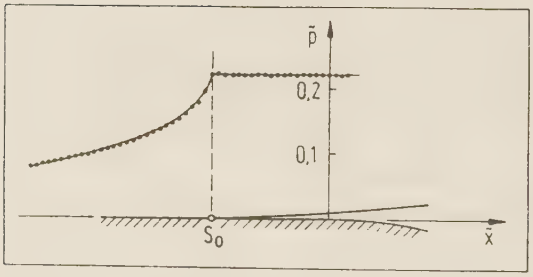


Bild 5.13:
Druckverteilung um S_o
$\tilde{\omega}_o = -3.0$, $\Delta s = -0.09$

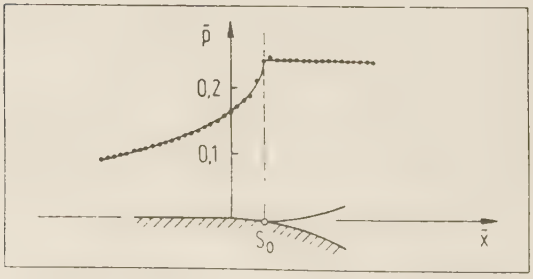
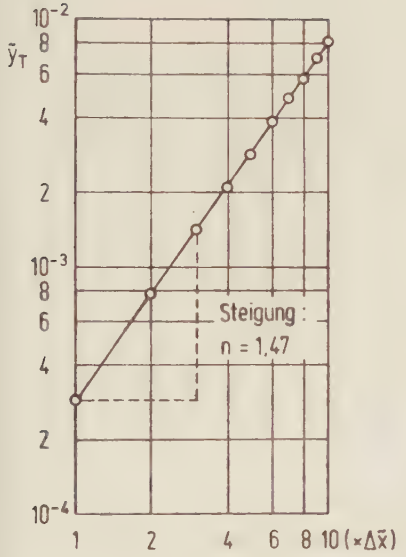


Bild 5.14:
Druckverteilung um S_o
$\tilde{\omega}_o = -3.0$, $\Delta s = 0.025$



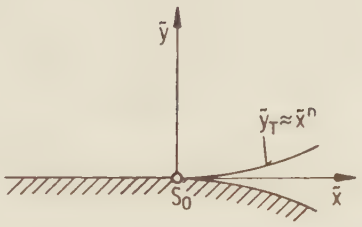


Bild 15:

Freie Stromlinie $\tilde{y}_T$ in der Nähe des Abströmpunktes - doppelt log. Auftragung

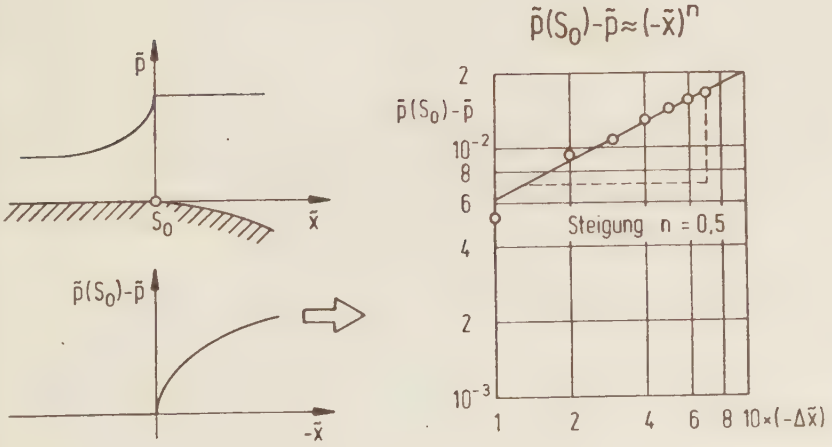


Bild 5.16: **Druckverteilung vor dem Abströmpunkt S_o**

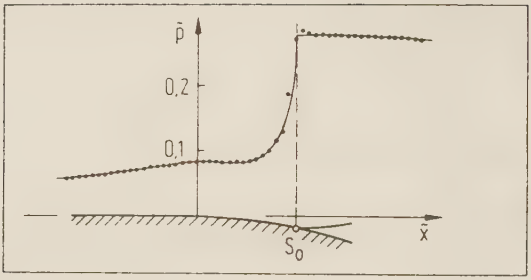


Bild 3.17: Druckverteilung um S_o , $\tilde{\omega}_o$ =-3.0 , Δs=0.075

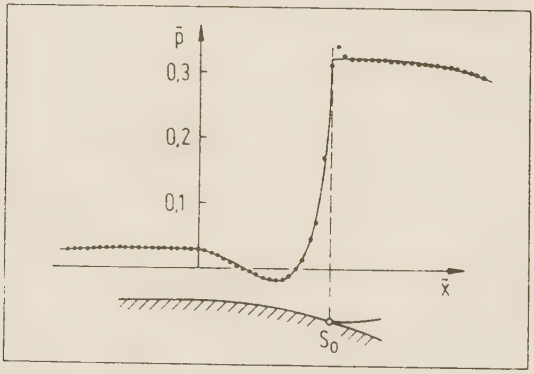


Bild 3.18: Druckverteilung um S_o , $\tilde{\omega}_o$ =-3.0 , Δs=0.1

Da dieser Typ bei S_o eine Singularität in der Druckverteilung aufweist, $(d\tilde{p}/d\tilde{x})^{-1} = 0$, sind hier numerische Schwierigkeiten zu erwarten. Tatsächlich zeigt die Druckverteilung vor S_o Abweichungen vom Gradienten $n=0,5$ (s. Bild 5.16) und wird der erwartete Gradient $n=1,5$ für $\tilde{y}_\tau$ nicht exakt erfüllt. Bei später gerechneten Beispielen mit nichtsingulären Druckverteilungen (s. Kap. 5.5) treten diese Schwierigkeiten bei S_o nicht auf.

Die gezeigten Beispiele 5.11-5.14 deuten schon an, was alle weiteren Berechnungen bestätigen:
Alle Parameter-Kombinationen (Δs, $\tilde{\omega}_o \neq 0$) führen zu einem lokalen Verhalten, das dem Typ $\tilde{y}_\tau \approx \tilde{x}^{3/2}$ entspricht.
Die Bilder 5.17, 5.18 zeigen die Fälle, in denen der Abströmpunkt weiter zur Dellenmitte gelegt ist. Es kommt dann nicht zu einer gleichmäßigen Verzögerung der Strömung vor S_o, sondern lokal zu einer Beschleunigung (s. Bild 5.18).
Die einzige Parameter-Kombination, die eine singuläre Druckverteilung bei S_o vermeidet, ist $(\Delta s, \tilde{\omega}_o) = (0,0)$. Diese Totwasser-Lösung, Bild 5.19, widerspricht aber einer entscheidenden Aussage des Batchelor-Modells: der endlichen, von Null verschiedenen Drehung im geschlossenen Innengebiet.

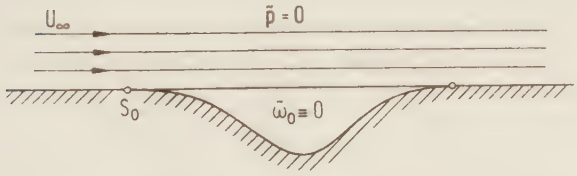


Bild 5.19: Totwasser-Strömung an der Dellengeometrie

5.4. Anwendung des Batchelor-Modells auf andere Geometrien (weiche Stufe, Kreiszylinder)

Bevor Schlüsse aus dem Ergebnis von Kap. 5.3 gezogen werden, soll an zwei anderen Geometrien die Tauglichkeit des Batchelor-Modells als Grundlösung einer asymptotischen Entwicklung untersucht werden. Dies soll an den zwei gewissermaßen 'Prototypen' Ablösung erzeugender Geometrien geschehen:

- der zurücktretenden Stufe, hier allerdings ohne scharfe Ecken, um die Ablösestelle nicht durch die Geometrie a priori zu fixieren (weiche Stufe).
- dem Kreiszylinder.

Wie das vorige Kapitel gezeigt hat, ist der Einfluß endlicher Drehung auf die Form des Ablösegebietes im Vergleich zum Ablösegebiet bei $\omega_\infty \equiv 0$ (Totwasser) relativ gering. Es erscheint daher sinnvoll, zunächst das Ablösegebiet für $\omega_\infty \equiv 0$ zu bestimmen, um auf dieser Basis den Einfluß der Drehung $\omega_\infty \neq 0$ beschreiben zu können.
Zumindest am Kreiszylinder kann die Außenströmung nicht länger nach Gl. (5.15) bestimmt werden, da es sich nicht mehr um schlanke Körper handelt. Es wurde deshalb ein Singularitäten-Verfahren entwickelt, das auf einem Vorschlag von Martensen [34] beruht. Das Strömungsfeld wird dabei durch die Überlagerung aus der Anströmung und einer Wirbelverteilung längs der (u.U. fiktiven) Körperkontur gebildet. Mit der sog. Ruhebedingung (keine Strömungsgeschwindigkeit im Körperinnern) ergibt sich Gl. (5.33) als Integralgleichung für die transformierte Zirkulationsdichte $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \gamma(t)\sqrt{\dot{x}(t) + \dot{y}(t)} \tag{5.32}$$

Mit 't' ist eine zunächst noch nicht spezifizierte Parameterdarstellung eingeführt ($\dot{} \triangleq$ Ableitung nach t), die es erlaubt, die Aufpunktverteilung einer numerischen Lösung in bestimmten Bereichen zu konzentrieren.

Die Integralgleichung (Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art) lautet:

$$\frac{1}{2}\omega(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{x_L}^{x_R} K(t,t')\,\omega(t')\,dt' = R(t,x_L,x_R) \qquad (5.33)$$

Das Integral in Gleichung (5.33), das ursprünglich im Intervall $[-\infty,\infty]$ zu lösen war, wurde dabei durch ein Integral über den endlichen Bereich $[x_L,x_R]$ ersetzt. $R(t,x_L,x_R)$ enthält die analytische Lösung der durch ${}_{x_L}\int^{x_R}\ldots dt'$ nicht berücksichtigten Randbereiche und lautet:

$$R(t,x_L,x_R) = \dot{x}\left[1+\frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{arctg}\frac{x_R-x}{y-y_R} - \operatorname{arctg}\frac{x_L-x}{y-y_L} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{y-y_L}{|y-y_L|}+\frac{y-y_R}{|y-y_R|}\right)\right\}\right]$$
$$-\dot{y}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{(x-x_L)^2+(y-y_L)^2}{(x-x_R)^2+(y-y_R)^2} \qquad (5.34)$$

x_L und x_R sind Punkte hinreichend weit rechts bzw. links von der betrachteten Kontur, an denen die singulären Flächen (an der weichen Stufe z.B.: die Wände) auf dem Niveau y_L bzw. y_R parallel zur y-Achse verlaufen.
Die Körperkontur selbst geht in die Kernfunktion K(t,t') ein, die lautet:

$$K(t,t') = \frac{\dot{x}(t)[\,y(t)-y(t')\,] - \dot{y}(t)[\,x(t)-x(t')\,]}{[\,x(t)-x(t')\,]^2+[\,y(t)-y(t')\,]^2} \qquad (5.35)$$

Die Lösung der Gleichung (5.33) erfolgt, indem durch Diskretisierung in N Aufpunkte ein System aus N linearen (linear unabhängigen) Gleichungen mit N Unbekannten gewonnen wird, welches mit Standard-Lösungsverfahren (Gauss- oder Gauss-Seidel-Verfahren) gelöst werden kann. Eine dem konkreten Problem angepaßte

Transformationsfunktion x(t) erlaubt es, die notwendigerweise beschränkte Aufpunkt-Menge sinnvoll auszunutzen, indem eine Häufung an bestimmten Konturstellen vorgesehen wird.

5.4.1. weiche Stufe

Die geometrische Form der weichen Stufe lautet (s. Bild 5.20):

$$y_k \equiv \frac{y_k^*}{l^*} = \frac{H_s}{2}\left[\cos\left\{\frac{\pi}{l_s}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}+1\right] \quad ; -\frac{1}{2} \le x \le -\frac{1}{2}+l_s$$

$$y_k = H_s \quad ; x < -\frac{1}{2} \qquad (5.36)$$

$$y_k = 0 \quad ; x > -\frac{1}{2}+l_s$$

Die Bezugslänge l^* zählt dabei vom Stufenbeginn bis zum Wiederanlegepunkt der freien Stromlinie.

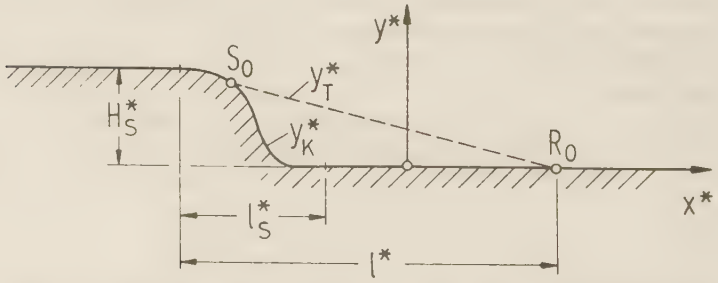


Bild 5.20: Stufengeometrie

Betrachtet man die Stufe nicht als schlanken Körper (linearisierte Theorie), so hat das Modell drei Parameter:

- relative Stufenhöhe H_s^*/l_s^*
- Lage des Abströmpunktes S_o
- die Drehungsstärke im Innengebiet ω_o

Bei sonst festen Bedingungen fixiert die Lage von S_o die Position des Wiederanlegepunktes R_o. Aus numerischen Gründen wurde R_o festgehalten und jeweils S_o bestimmt. Unterschiedliche Positionen von S_o (und damit relativ zur Stufe auch von R_o) ergeben sich dann durch affine Streckungen der Stufe als $(H_s, l_s) \rightarrow (c_1 H_s, c_1 l_s)$. Die drei freien Parameter sind also durch H_s, l_s, ω_o beschrieben.
Bild 5.21 zeigt den Fall $H_s = 0.1$; $l_s = 0.5$; $\omega_o = 0.$ mit der entsprechenden Druckverteilung. Um den Abströmpunkt S_o ist auch hier wieder das '$n = \frac{3}{2}$' Verhalten vorhanden. Die bereits in Kap. 5.3.3 erwähnten numerischen Schwierigkeiten treten auch hier auf, so daß der errechnete Kurvenverlauf von p in unmittelbarer Umgebung von S_o durch den nach Gleichung (5.2) bzw. (5.18) erforderlichen Verlauf ersetzt worden ist (·····Linie in Bild 5.21).
Bild 5.22 zeigt den qualitativ gleichen Verlauf der Druckverteilung für längere Totwasser-Gebiete.
Eine endliche Drehung $\omega_o \neq 0$ im Innengebiet hat erwartungsgemäß einen geringen Einfluß auf die Form der freien Stromlinie und damit auch auf den Verlauf der Druckverteilung, wie Bild 5.23 zeigt. Trotz der hohen Drehungsstärke von $\omega_o = -10$, die zu Innengeschwindigkeiten von bis zu 36% der Anströmgeschwindigkeit führt, ändert sich die Form der Trennstromlinie, vor allem aber die Druckverteilung vor dem Abströmpunkt nur unwesentlich.

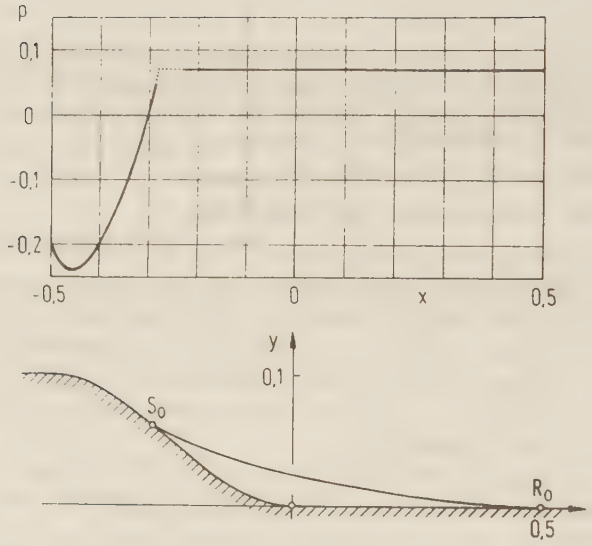


Bild 5.21: Stufenströmung für: $\omega_o=0$, $H_s=0.1$, $l_s=0.5$

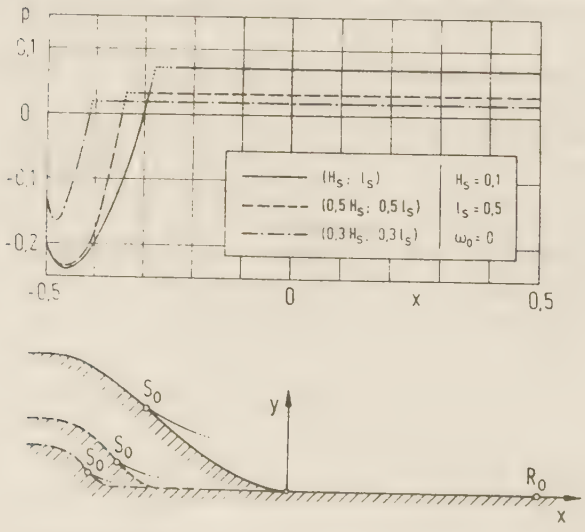


Bild 5.22: Stufenströmung mit verschiedener Länge des Totwasser-Gebietes

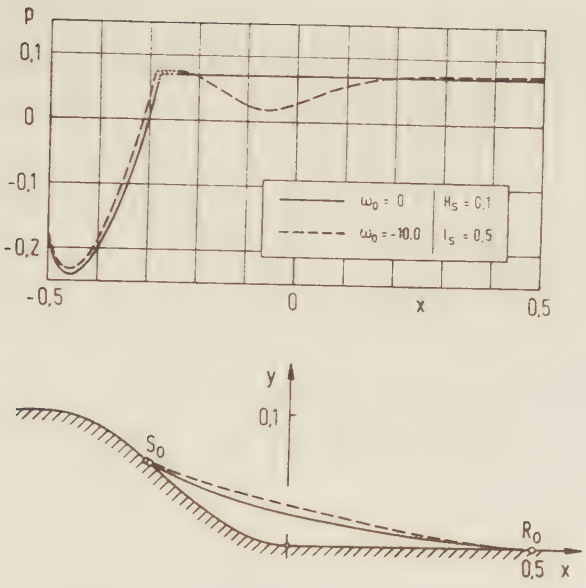


Bild 5.23: Der Einfluß endlicher Drehungsstärke auf die Druckverteilung

5.4.2. Kreiszylinder

Die Strömung am Kreiszylinder hat die beiden freien Parameter:

- Lage des Abströmpunktes S_0
- Drehungsstärke im Innengebiet ω_0

Für die Totwasser-Lösung $\omega_0 = 0$ wurde die Lage von S_0 so gewählt, daß ein Vergleich mit einer Lösung von Southwell und Vaisey [52] möglich ist, die diese spezielle Lösung mit Hilfe einer Relaxationsmethode erhalten haben. Der Verlauf der freien Stromlinie stimmt im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit der Lösung nach dem hier beschriebenen Verfahren, Bild 5.24, überein. Die Druckverteilung zeigt wieder den typischen '$n = \frac{3}{2}$'-Verlauf um den Abströmpunkt S_0. Ein geschlossenes Totwasser-Gebiet ist, wie dieses Beispiel zeigt, bei einem Totwasser-

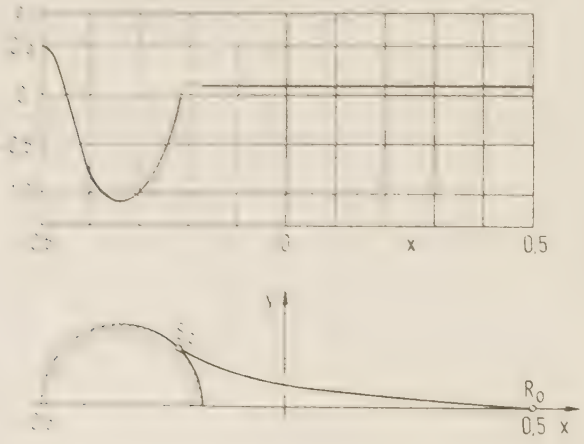


Bild 5.24: Totwasser-Strömung am Kreiszylinder

druck $p_o>0$ möglich. Der Zahlenwert von p_o wird kleiner, wenn die Totwasserlänge wächst, wie dies in Bild 5.22 auch schon für die weiche Stufe gezeigt wurde. Der Grenzfall unendlicher Totwasserlängen ist das Kirchhoff-Modell der freien Stromlinie (s. Kap. 5.2.1) mit $p_o=0$.
Bild 5.25 zeigt den Einfluß endlicher Drehung.

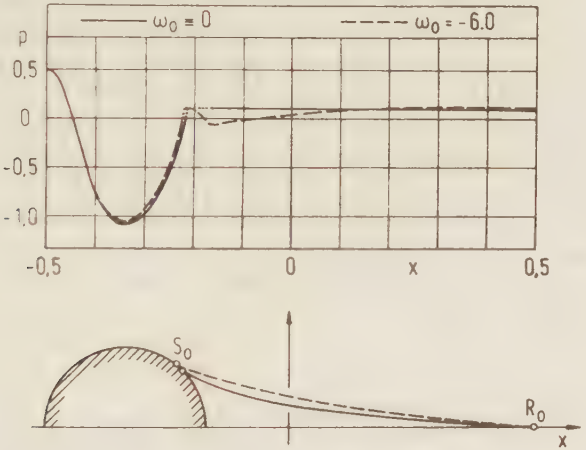


Bild 5.25: **Der Einfluß endlicher Drehungsstärke auf die Druckverteilung**

Es wurde hier die Innenströmung auch mit der linearisierten Theorie, Gl. (5.22), berechnet, obwohl dies strenggenommen nicht mehr zulässig ist. Die gewonnene Lösung läßt aber den nach allen anderen Ergebnissen zu erwartenden Schluß zu, daß die endliche Drehungsstärke im Innern keinen entscheidenden Einfluß auf die Druckverteilung um S_o hat.

Fazit

An keiner der drei untersuchten Geometrien - Delle, zurücktretende weiche Stufe, Kreiszylinder - konnte bei endlichen Längen der Ablösegebiete eine Druckverteilung gefunden werden, die für $\omega_o \neq 0$ (dies ist eine notwendige Voraussetzung des Batchelor-Modells) die notwendige Voraussetzung des glatten Abströmens erfüllt.
Der offensichtlich entscheidende Unterschied zum Fall der Kirchhoff-Strömung, bei der glattes Abströmen vorliegt, besteht darin, daß der Druck vor dem Abströmpunkt S_o hierbei auf einem höheren Niveau liegt, sich dem Punkt S_o also mit negativem Gradienten nähert (s. Bild 5.4), in allen anderen untersuchten Fällen aber ein positiver Gradient vor S_o vorliegt (s. Bilder 5.11-5.14, 5.17, 5.18, 5.21-5.25).
Diese These kann auf ihre Stichhaltigkeit untersucht werden, indem die Dellengeometrie so verändert wird, daß vor S_o ein negativer Druckgradient entsteht. Dies geschieht im folgenden Kapitel.

5.5. Modifizierte Dellengeometrie

Aufgrund der im vorigen Kapitel genannten Überlegungen wird die Dellengeometrie wie folgt modifiziert: Statt Gl. (5.30) gilt jetzt:

$$\tilde{y}_k = -\frac{1}{4}\left\{\cos 2\pi\left[\tilde{x}+\frac{1}{2}\right]-1\right\}^2 + H_1\frac{a_1}{4}\left\{\cos 8\pi\left[|\tilde{x}|-\frac{1}{4}\right]-1\right\}^2$$

$$H_1 = 1 \quad \text{für} \quad \frac{1}{4} \leq |\tilde{x}| \leq \frac{1}{2} \qquad \left| \quad -\frac{1}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{1}{2} \right.$$

$$H_1 = 0 \quad \text{für} \quad |\tilde{x}| < \frac{1}{4} \qquad (5.37)$$

Dies bedeutet, daß in den Bereichen $-\frac{1}{2} \leq \tilde{x} \leq -\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4} \leq \tilde{x} \leq \frac{1}{2}$ zu der ursprünglichen Dellengeometrie jeweils eine Wanderhebung ('pre hump') von der maximalen Dicke a_1 hinzugefügt worden ist. Bild 5.26 zeigt diese Geometrie.

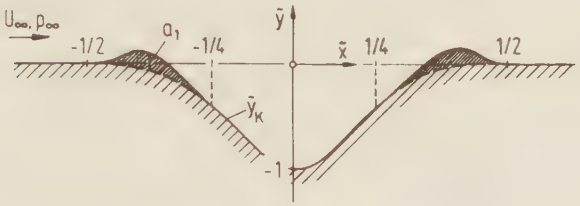


Bild 5.26: Modifizierte Dellengeometrie

Die Änderungen haben zur Folge, daß die Strömung am Dellenbeginn zunächst verzögert wird, und damit vor S_o ein negativer Druckgradient entstehen kann. Die These ist, daß für diesen Fall Parameterkombinationen (ω_o, S_o) existieren, bei denen ein glattes Abströmen ($d\tilde{p}/dx = 0$ bei S_o^-) stattfindet.
Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß es sich um eine Untersuchung handelt, ob mit dem Batchelor-Modell die Kriterien (I) und (II), s. (5.12), überhaupt erfüllt werden können. Die Frage nach der praktischen Bedeutung der Konturwahl (5.37) ist in diesem Zusammenhang von untergeordneter Bedeutung.

Parameter des Problems sind:

- Lage des Abströmpunktes S_o
- Drehungsstärke im Innengebiet , $\tilde{\omega}_o$
- 'pre hump'-Höhe a_1

Da das Problem wieder in der vollständig linearisierten Form gelöst wird, ist die relative Dellentiefe kein Parameter (s. Tabelle 5.5).
Für a_1 gilt in Analogie zu Tabelle 5.5: $a_1 = a_1^* / (l^* \varkappa_H)$. a_1 muß einerseits groß genug sein, um den gewünschten Verzögerungseffekt zu erzielen ($a_1 = 0$ ist die einfache Delle nach Gl. (5.30)), darf aber andererseits nicht so groß sein, daß bereits vor S_o Ablösung auftritt. Auf diesen letzten Punkt wird an einer späteren Stelle dieses Kapitels eingegangen.

5.5.1. Variation des Abströmpunktes S_o

Zunächst soll für feste Werte von a_1 und $\tilde{\omega}_o$ der Abströmpunkt S_o variiert werden. Für $a_1 = 0.1$ und $\tilde{\omega}_o = -2.0$ z.B. zeigt sich folgendes Ergebnis:

S_o vor $\tilde{x} = -0{,}40$:	Die freie Stromlinie $\tilde{y}_T$ schneidet den ('pre hump')-Körper
S_o bei $\tilde{x} = -0{,}40$:	glattes Abströmen
S_o nach $\tilde{x} = -0{,}40$:	Druckverteilung wie für '$n = \frac{3}{2}$'-Fall typisch.

Es zeigt sich somit genau das gleiche Verhalten wie am Kreiszylinder für den Winkel $\theta_o = 56°$ (s. Kap. 5.2.1) was die am Ende von Kap. 5.4 aufgestellte These bestätigt. Bild 5.27 zeigt den Druckverlauf über die gesamte Delle mit der Lage von S_o bei $\tilde{x} = -0{,}40$ (glattes Abströmen).
Ein Verschieben von S_o auf die Stelle $\tilde{x} = -0{,}39$ führt zu dem beschriebenen '$n = \frac{3}{2}$'-Verhalten des Druckes um S_o.

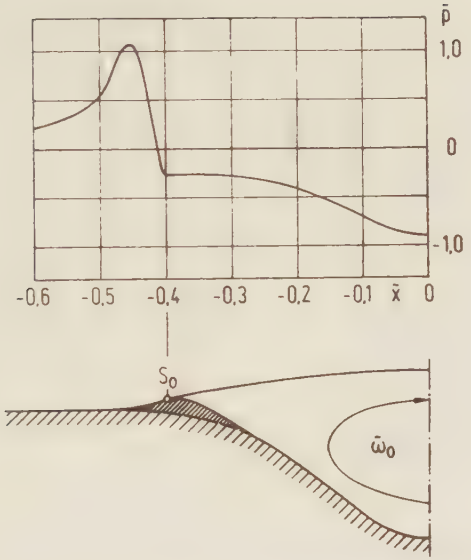
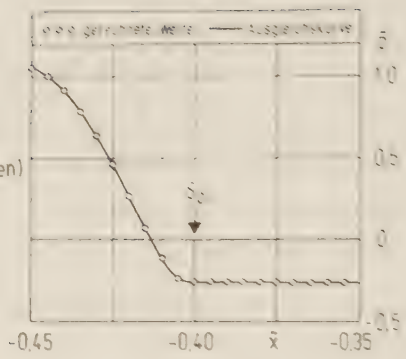


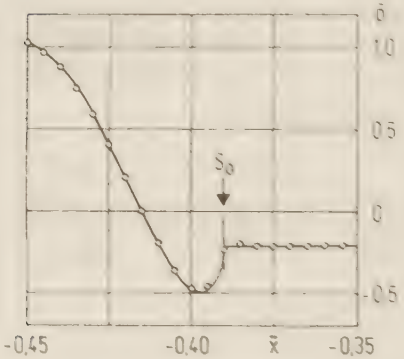
Bild 5.27: 'glattes Abströmen'
für: $\tilde{\omega}_\infty = -2.0$, S_o bei $\tilde{x} = -0.4$
$a_1 = 0.1$

Bild 5.28 gibt die lokale Druckverteilung um den jeweiligen Punkt S_o wieder. Neben dem unterschiedlichen Charakter der Druckverteilung ist zu erkennen, daß die singuläre Verteilung (vertikale Tangente bei S_o) im zweiten Fall zu den bereits mehrfach erwähnten numerischen Schwierigkeiten führt, die berechneten Werte streuen in der Umgebung von S_o erheblich stärker.
Im Fall des glatten Abströmens zeigt die freie Stromlinie das 'n $= \frac{5}{2}$'-Verhalten, wie es in Tabelle 5.2 beschrieben ist (vgl. dazu den 'n $= \frac{3}{2}$'-Fall in Bild 5.15).

S_0 bei $\tilde{x}=-0.40$
(glattes Abstromen)



S_0 bei $\tilde{x}=-0.39$



Druckverteilung um S_0
für verschiedene Lagen
des Abströmpunktes
$\tilde{\omega}_0=-2.0$, $a_1=0.1$

Bild 5.09 zeigt den Verlauf der Trennstromlinie in doppeltlog. Auftragung für den Fall $\tilde{\omega}_0=-2.5$, $a_1=0.117$, S_0 bei $\tilde{x}=-0.40$.

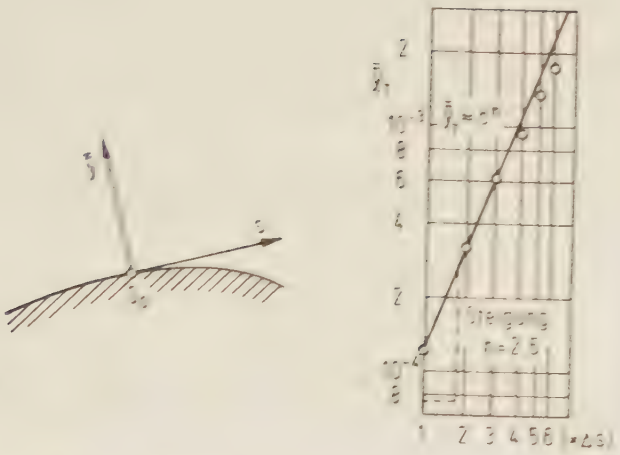


Bild 5.22: Verhalten der freien Stromlinie stromabwärts von S_0 (doppelt log. Auftragung)
S_0 bei $\tilde{x}=-0.40$, $\tilde{\omega}_0=-2.5$, $a_1=0.117$

5.5.2. Variation der Drehungsstärke $\tilde{\omega}_0$

Für eine bestimmte Geometrie (d.h. für einen festen Wert a_1) stellt die Bedingung des glatten Abströmens einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Lage von S_0 und der Drehungsstärke $\tilde{\omega}_0$ her. Bild 5.30 zeigt, daß die Lage von S_0, bei der glattes Abströmen erfolgt, im Rahmen der Genauigkeit des hier verwendeten numerischen Verfahrens unabhängig von der Drehungsstärke $\tilde{\omega}_0$ ist. Bild 5.30 impliziert den Potentialfall ($\tilde{\omega}_0=0$), was auch hier wieder bestätigt, daß endliche Werte von $\tilde{\omega}_0$ einen geringen Einfluß auf die Druckverteilung an den Abströmpunkt haben. $\tilde{\omega}_0$ ist nach oben dadurch begrenzt, daß das Rechenverfahren nicht mehr konvergiert (dies war im Beispiel des Bildes 5.30 für $\tilde{\omega}_0 = -4{,}0$ der Fall).

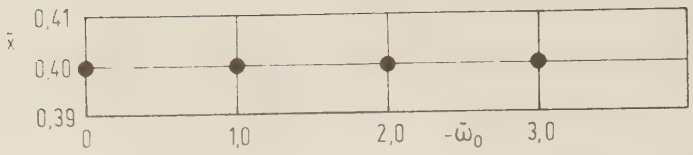


Bild 5.30: Lage des Abströmpunktes S_o (glattes Abströmen) für verschiedene Drehungsstärken $\tilde{\omega}_o$, a_1=0.1

Bild 5.31 zeigt die unterschiedliche Auslenkung der berechneten Trennstromlinie $\tilde{y}_T$ für die beiden Werte $\tilde{\omega}_o$=0 (Totwasser) und $\tilde{\omega}_o$ = -3.0.

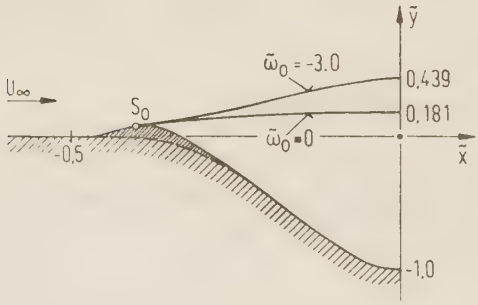


Bild 5.31: Trennstromlinie $\tilde{y}_T$ für verschiedene Drehungsstärken $\tilde{\omega}_o$, a_1=0.1 , glattes Abströmen

Tabelle 5.9 gibt als charakteristische Werte der Beispiele aus Bild 5.30 für $\varkappa_H = 0.1$ folgende Daten an:

- den Druck am Abströmpunkt S_o: $p(S_o)$
- den Sprung im Gesamtdruck über die Trennstromlinie hinweg: $h = h^*/(\rho U_\infty^2)$
- die Geschwindigkeit auf der Trennstromlinie in Dellenmitte, $w_{T,a}(0)$ außen, $w_{T,i}(0)$ innen.

$-\tilde{\omega}_o$	$p(S_o)$	h	$w_{T,a}(0)$	$w_{T,i}(0)$
0.0	-0.041	0.541	1.04	0.0
1.0	-0.038	0.538	1.05	0.17
2.0	-0.025	0.525	1.09	0.36
3.0	0.004	0.496	1.17	0.61

Tabelle 5.9: Charakteristische Werte für verschiedene Drehungsstärken $\tilde{\omega}_o$
$a_1=0.1$, glattes Abströmen , $\varkappa_H=0.1$

5.5.3. Variation der 'pre hump'-Höhe a_1

Die ursprüngliche Dellengeometrie war modifiziert worden, um den Druck vor S_o auf ein höheres Niveau als bei S_o selbst zu bringen und somit einen negativen Druckgradienten bei S_o^- zu ermöglichen. Dies impliziert, daß a_1 einen bestimmten Mindestwert haben muß, dessen genauer Zahlenwert hier aber nicht von besonderer Bedeutung ist. Auf der anderen Seite gibt es aber auch einen bestimmten Höchstwert von a_1, der nicht überschritten werden darf, da sonst bereits vor S_o die Goldstein-Singularität auftritt. Dieser Wert kann, ähnlich wie in Kap. 5.3.3 beschrieben, mit Hilfe des modifizierten Stratford-Kriteriums

ermittelt werden.

Es soll hier nur für das bisher stets verwendete Beispiel $a_1 = 0.1$ nachgewiesen werden, daß für $\varkappa_u$ ein endlicher Bereich bleibt, in dem

- die Strömung nicht als anliegende Strömung existiert
- nicht vor $\tilde{S}_0$ die Goldstein-Singularität auftritt.

Bild 6.40 zeigt die Druckverteilung $\tilde{p}(\tilde{x})$, die im modifizierten Stratford-Kriterium, Gl. (5.31), Verwendung findet. Die Abweichungen gegenüber Bild 6.10 (Delle ohne pre hump) entstehen durch die 'pre hump'-Geometrie im Bereich $-0{,}5 \leq \tilde{x} \leq -0{,}25$.

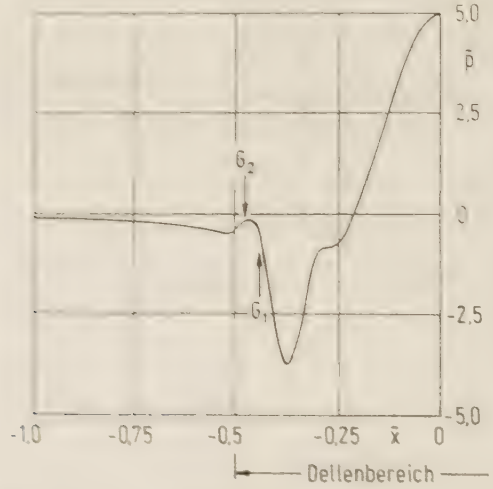


Bild 6.40: Druckverteilung auf $\tilde{y}_k$ (Potentialtheorie), $a_1 = 0.1$

Für $a_1 = 0.1$ und $\varkappa_k = 2.5$ (Lage der Vorderkante) ergibt sich für steigende Werte von $\varkappa_u$ folgendes Verhalten:

- anliegende Strömung für $0 \leq \varkappa_u \leq 2.9\ 10^{-3}$
- Goldstein-Singularität bei $\tilde{x} = +0{,}44$ (G1 in Bild 6.40) gespiegelt für $\varkappa_u \geq 2.9\ 10^{-3}$

- Goldstein-Grenzzustand bei $\tilde{\gamma} = -0.48$ (s.a. Bild 5.32) für $\varkappa_H = 20\,10^{-2}$

Die Übergänge für $\varkappa_H$ bei denen durch den mit 02 bezeichneten Grenzfall gegeben. Zwar darf für diesen Grenzfall die Goldstein-Singularität vor S_o eben auftreten, es ist aber die Druckverteilung der abgelösten Strömung ausgeprägt, aber was zu einer $\tilde{\omega}_o$-Abhängigkeit dieser Grenze führt. Für den Beispiel $c_t = 0.1$, $\tilde{\omega}_o = -2.0$ gilt die Druckverteilung nach Bild 5.27, was nach Gleichung (5.3) zu einem Wert $\varkappa_H \approx 20^{-2}$ führt, bei dem erstmals die Goldstein-Singularität vor S_o auftritt.

Insgesamt ist die Theorie damit gültig für einen Bereich:

$$\varkappa_H \text{ aus } [2.9\,10^{-2}, 1.04\,10^{-2}] \quad \text{für} \quad c_t = 0.1\,,\ \varkappa_L = 2.5\,,\ \tilde{\omega}_o = -2.0$$

Änderungen in der pre hump-Höhe $\tilde{\omega}_o$ führen zu nur unwesentlichen Verschiebungen des Abströmpunktes S_o (glatten Abströmen). Eine Änderung in c_t von 0.1 auf 0.0375 führt zu einer Verschiebung in S_o von -0.40 auf -0.39.

Vorläufiges Fazit aus Kap. 5.5

Durch bestimmte Modifikationen der Belastungsmethode ist es möglich, mit dem Batchelor-Modell das Kriterium I (5.2) für die Grundlösung einer asymptotischen Beschreibung abgelöster Strömungen zu erfüllen. Diese Lösungen müssen nur im Hinblick auf Kriterium II untersucht werden.

Mit $\tilde{\omega}_o \neq 0$ treten für $Re^{1/2}$ im Integralen endliche Geschwindigkeiten auf, die als Lösungen der Poisson-Gleichung (reibungsfrei) die Haftbedingung an der Wand nicht erfüllen. Aus diesem Grunde entsteht für endliche Re-Zahlen eine wandnahe reibungs- und damit drehungsbehaftete (Grenz-) Schicht. Die für diese Grenzschicht maßgebende Außenströmung bzw. Druckverteilung ist durch die reibungsfreie, aber drehungsbehaftete Kernströmung ($\varkappa \neq \tilde{\omega}_o^*$) gegeben. Bild 5.33 zeigt eine solche Druckverteilung als typisches Beispiel.

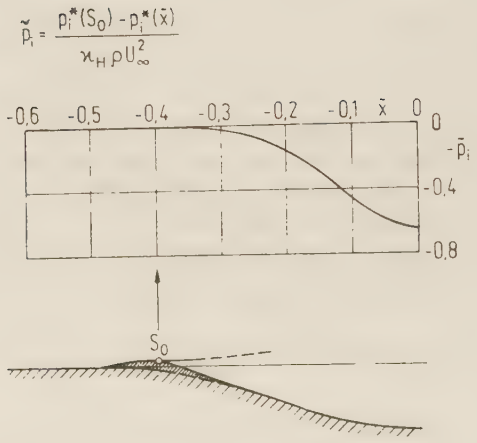
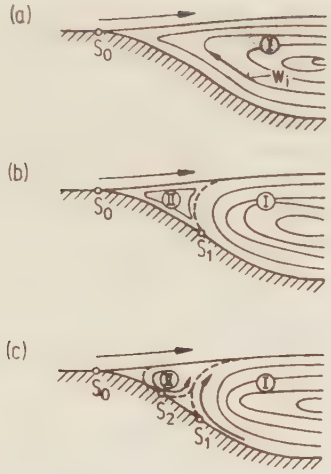


Bild 5.33: Druckverteilung im Innengebiet
$\tilde{\omega}_0 = -2.0$, S_0 bei $\tilde{x} = -0.40$, $a_1 = 0.1$
(s. Bild 5.27)

Da das Innengebiet zwei Staupunkte besitzt (bei S_0 und R_0) wird die reibungsfreie 'Außenströmung' auf den Wert Null verzögert. Dies führt aber zwangsläufig zur Goldstein-Singularität. Die weitere Argumentation ist von der Tatsache bestimmt, daß die Goldstein-Singularität nicht beseitigt werden kann, sondern vermieden werden muß (s. Kap. 2.2). D.h. die 'Außenströmung' ist so zu modifizieren, daß die Goldstein-Singularität vermieden wird. Dies ist prinzipiell möglich, da das Batchelor-Modell zwar eine konstante Drehung fordert, nicht aber, daß diese bei gleichem Drehsinn in einem geschlossen zusammenhängenden Gebiet vorhanden ist. Betrachtet man in Bild 5.34 (a) die Strömung an der Wand (gekennzeichnet mit w_i), so könnte diese durch eine Modifikation des Gebietes I so verändert werden, daß die Goldstein-Singularität vermieden wird. Notwendige Voraussetzung ist dann tangentiales Abströmen bei S_1, was ein Gebiet II

Bild 5.34:
Modifiziertes Batchelor-Modell



entstehen läßt, in dem dieselbe Situation entsteht, wie Bild 5.34 (b) zeigt. Eine Fortsetzung dieser Überlegung zeigt, daß unendlich viele Gebiete entstehen, wie Bild 5.34 (c) für einen weiteren Schritt andeutet.
Die Frage, ob diese Lösung mit unendlich vielen Gebieten Grundlösung einer asymptotischen Entwicklung sein kann, soll hier nicht weiter erörtert werden. Festzuhalten bleibt:

> Das Batchelor-Modell mit endlich vielen geschlossenen Rezirkulationsgebieten ist nicht in der Lage, die Kriterien für die Grundlösung einer asymptotischen Entwicklung abgelöster Strömungen zu erfüllen.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß $\omega_\infty \neq 0$ eine notwendige Voraussetzung des Batchelor-Modells ist.
Im weiteren soll nun der Fall $\omega_\infty \equiv 0$ (Totwasser) untersucht werden.

Kriterium I (glattes Abströmen) ist für die einfache Delle durch S_0 am Dellenbeginn erfüllt (s. Bild 5.19). Für die modifizierte Dellengeometrie ist glattes Abströmen ebenfalls möglich, wie schon aus Bild 5.30 ersichtlich ist. Bild 5.35 zeigt den Druckverlauf für das Beispiel $a_1 = 0.1$.

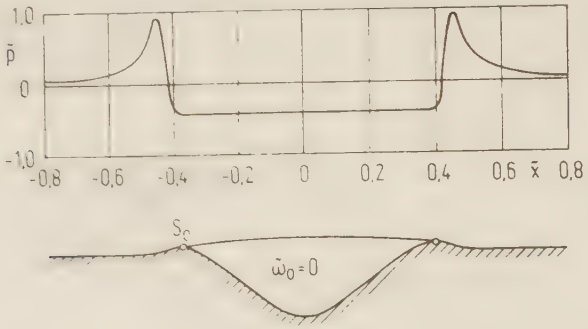


Bild 5.35: Druckverteilung an der modifizierten Dellengeometrie

Zur Überprüfung von Kriterium II muß der Einfluß endlicher Re-Zahlen untersucht werden. Dies geschieht im folgenden Kapitel.

5.6. Der Einfluß endlicher Re-Zahlen auf die Dellenströmung mit $\omega_0 \equiv 0$

In diesem Kapitel soll der Einfluß endlicher Re-Zahl am Beispiel der einfachen Delle beschrieben werden.
Die Grundlösung für $Re^{-1} = 0$ ist denkbar einfach aufgebaut: Die Außenströmung folgt der Trennstromlinie als Fortsetzung der Wand, im Innengebiet ist die Strömungsgeschwindigkeit überall gleich Null (s. Bild 5.19).

Für $\bar{Re}^{-1} \neq 0$ wird das Bild erheblich komplizierter: Die ankommende Grenzschicht löst als Ganzes von der Wand ab, verursacht durch den Triple-Deck immanenten Ablösemechanismus. Diese Grenzschicht setzt sich als freie Scherschicht bis zum Wiederanlegen fort. Am Wiederanlegepunkt teilt sich die Scherschicht auf, wobei ein Teil als Wandgrenzschicht stromabwärts weiterströmt, der andere Teil aber im Delleninnern zurückströmt und letztlich in den Entrainment-Strom der freien Scherschicht übergeht. Bild 5.36 ist eine grobe Skizze des eben beschriebenen Modells, dessen asymptotische Struktur im weiteren detailliert beschrieben werden soll.

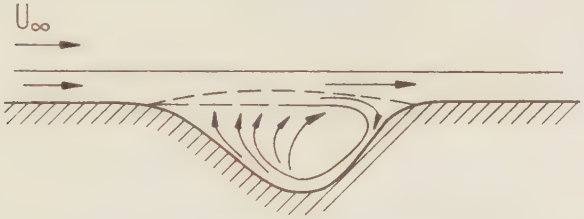


Bild 5.36: Skizze der Dellenströmung bei endlicher Re-Zahl

Um den Überblick zu bewahren, ist es wichtig, eine Numerierung der einzelnen Approximationsgebiete vorzunehmen. Bild 5.37 tut dies für 8 Bereiche. Die Ziffern 1 bis 8 erscheinen im weiteren als Indizes an den entsprechenden abhängigen und unabhängigen Variablen, wobei Untergebiete zusätzlich mit den Buchstaben A, B, ... versehen werden. Die dimensionslosen, unabhängigen Variablen werden als 's' ('streamwise') und 'n' (normal') geschrieben. Im Untergebiet A des Feldes 2 z.B. lauten die unabhängigen Variablen also s_{2A}, n_{2A} .

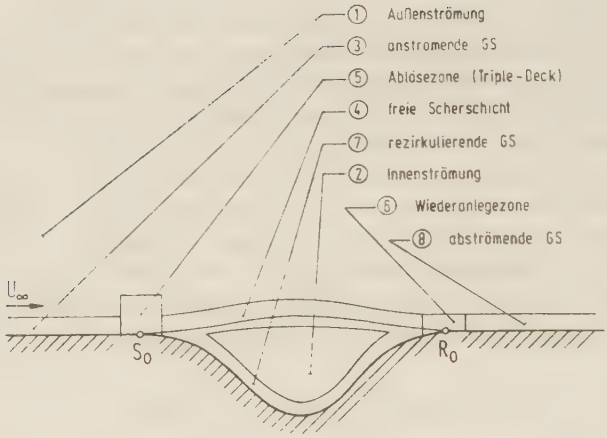
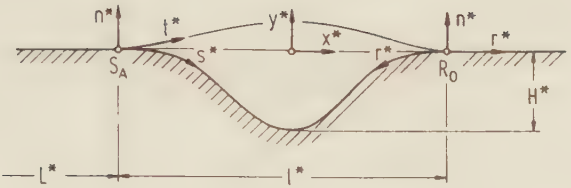


Bild 5.37: Approximationsgebiete der asymptotischen Beschreibung abgelöster Strömungen

Bild 5.38 zeigt die im weiteren verwendeten Koordinatensysteme.

Die nachfolgende Beschreibung verwendet wesentliche Elemente der asymptotischen Struktur unendlich großer Ablösegebiete (F.T. Smith [45]) und der asymptotischen Beschreibung der Strömung in der Nähe des Ablösepunktes (V.V. Sychev [54], A.F. Messiter [35]). Tabelle 5.19 am Ende des Kapitels 5.6 enthält eine Auflistung der einzelnen Approximationsgebiete und der dort gültigen Variablen.

Strömungsablösung liegt vor, wenn die Grenzschicht als Ganzes die Wand verläßt und in eine freie Scherschicht übergeht. Am Beispiel der einfachen Delle ist dies eine Scherschicht zwischen den (Potential-) Geschwindigkeiten $u_{außen} = 1.0$ und $u_{innen} = 0.0$. Alle Abweichungen von diesen Werten sind Effekte höherer Ordnung und deshalb für die Scherschicht 1.Ordnung nicht relevant.



Koordinatensysteme : (• ≙ dimensionsbehaftet , alle kartesisch)

[I]	x^*, y^*	(Dellengeometrie)
[II]	s^*, n^*	folgt der Wand ; Ursprung S_A
[III]	t^*, n^*	folgt der Trennstromlinie ; Ursprung S_A
[IV]	r^*, n^*	folgt der Wand ; Ursprung R_0

globale Re-Zahl : $Re = U_\infty L^* / \nu$

$l^*/L^* = O(1)$; $H^*/L^* = O(1)$

Bild 5.38: Verwendete Koordinatensysteme

Tabelle 5.10 enthält die dimensionslosen, gestreckten Variablen:

t^*	n^*	Ψ^*	u^*	v^*
$s_4 =$ $\dfrac{t^*}{L^*}$	$n_4 =$ $\dfrac{n^*}{L^*} Re^{1/2}$	$\Psi_4 =$ $\dfrac{\Psi_4^*}{U_\infty L^*} Re^{1/2}$	$u_4 =$ $\dfrac{u^*}{U_\infty}$	$v_4 =$ $\dfrac{v^*}{U_\infty} Re^{1/2}$

Tabelle 5.10: Variable im Feld 4

Einsetzen in die Navier-Stokes-Gleichungen ergibt zur niedrigsten Ordnung:

$$\frac{\partial \Psi_4}{\partial n_4}\frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial n_4 \partial s_4} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial s_4}\frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial n_4^2} = \frac{\partial^3 \Psi_4}{\partial n_4^3} \qquad (5.38)$$

Randbedingungen sind: $n_4 \to \infty$: $\partial \Psi_4 / \partial n_4 = 1$

$n_4 \to -\infty$: $\partial \Psi_4 / \partial n_4 = 0$

$n_4 = 0$: $\Psi_4 = 0$

Die Anfangsbedingung lautet: $\Psi_4(0, n_4) \sim \Psi_3(0, n_3)$

$\Psi_3(0, n_3)$ ist dabei die Stromfunktion der ungestört ankommenden Grenzschicht, die allerdings eine $s^{1/3}$-Singularität an der Wand besitzt.

Das ankommende Grenzschichtprofil wird im Triple-Deck (um den Ablösepunkt S_A) in Wandnähe gestört. Ist $n_3 = (n^*/L^*)Re^{1/2}$ die Normal-Koordinate der ankommenden Grenzschicht, so wurde in Kap. 3.1 gezeigt, daß diese Störung im Bereich $[\,0, n_3 Re^{-1/8}\,]$ erfolgt. Außerhalb dieser Störzone bleibt das Profil erhalten, wobei insbesondere gilt:

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial n_3} \sim \lambda n_3 \quad \text{für} \quad n_3 \to 0 \qquad (5.39)$$

Die wandnahe Störung pflanzt sich, zentriert um die freie Trennstromlinie, in die Scherschicht fort. Aufgrund der konstanten Außenrandbedingung (5.39) ist es sinnvoll, eine selbstähnliche Lösung für diese Störzone zu suchen, als:

$$s_{4A} = s_4 \quad ; \quad n_{4A} = n_4 s_4^{-\alpha} \quad ; \quad F_{4A} = \Psi_4 s_4^{-\beta}$$

Nach Einsetzen in Gl. (5.38) ergibt die s_4-Unabhängigkeit die Bedingung:

$$\boxed{\beta = 1 - \alpha} \qquad (5.40)$$

Die Randbedingung für $\eta_{4A} \to \infty$ lautet aufgrund von Gl. (5.39) $u_4 = F'_{4A}\, s_{4A}^{\beta-\alpha} = \lambda\, \eta_{4A}\, s_{4A}^{\alpha}$, woraus folgt:

$$\boxed{\beta - \alpha = \alpha} \qquad (5.41)$$

Aus (5.40), (5.41) ergeben sich die Exponenten , zu:

$$\alpha = \frac{1}{3} \quad ; \quad \beta = \frac{2}{3}$$

Tabelle 5.11 enthält die Variablen im Unterbereich 4A als Fortsetzung des 'lower deck' in die freie Scherschicht. Es wird dabei die für 'lower deck'-Variable übliche affine Transformation in λ verwendet, um die Lösung unabhängig vom ankommenden Grenzschichtprofil zu erhalten.

t^*	n^*	ψ^*	u^*	v^*
$s_{4A} = \frac{t^*}{L^*}$	$\eta_{4A} = \frac{n^*}{L^*} s_{4A}^{-\frac{1}{3}} Re^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{3}}$	$F_{4A} = \frac{\psi^*_{4A}}{U_\infty L^*} s_{4A}^{-\frac{2}{3}} Re^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{3}}$	$u_{4A} = \frac{u^*}{U_\infty} \lambda^{-\frac{2}{3}} = F'_{4A}\, s_{4A}^{\frac{1}{3}}$	$v_{4A} = \frac{v^*}{U_\infty} Re^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{3}} = s_{4A}^{-\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3} F_{4A} + \frac{\eta_{4A}}{3} F'_{4A} \right]$

Tabelle 5.11:
Variable im Feld 4A

Die DGL für F_{4A} lautet:

$$\boxed{F'''_{4A} + \frac{2}{3} F_{4A} F''_{4A} - \frac{1}{3} F'^{2}_{4A} = 0} \qquad (5.42)$$

Randbedingung:

$$n_{4A} \to \infty : \quad F'_{4A} = n_{4A}$$

$$n_{4A} \to -\infty : \quad F'_{4A} = 0$$

$$n_{4A} = 0 : \quad F_{4A} = 0$$

Diese selbstähnliche Lösung muß für $s_{4A} \to 0$ asymptotisch in die 'lower deck'-Lösung für $X \to \infty$ übergehen (matching). Im 'lower deck' gilt für $X \to \infty$ (s. F.T. Smith [44]):

$$\boxed{\frac{\psi^*}{U_\infty L^*} Re^{\frac{3}{4}} \sim \left[Re^{\frac{3}{8}} \left(\frac{t^*}{L^*} \right) \right]^{\frac{2}{3}}} \qquad (5.43)$$

Die selbstähnliche Lösung für $s_{4A} \to 0$ lautet:

$$\frac{\psi^*}{U_\infty L^*} = F_{4A} Re^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t^*}{L^*} \right)^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{1}{3}}$$

was umgeschrieben werden kann (in 'lower deck'-Variablen):

$$\boxed{\frac{\psi^*}{U_\infty L^*} Re^{\frac{3}{4}} = F_{4A} \lambda^{\frac{1}{3}} \left[Re^{\frac{3}{8}} \left(\frac{t^*}{L^*} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \sim \left[Re^{\frac{3}{8}} \left(\frac{t^*}{L^*} \right) \right]^{\frac{2}{3}}} \qquad (5.44)$$

und damit identisch mit (5.43) wird.
Da die freie Scherschicht durch die Entrainment-Wirkung die Strömung im Ablösegebiet in Gang setzt, interessiert zunächst nur die Querkomponente der Geschwindigkeit am unteren Rand, im Bereich der Substruktur 4A als Größe $F_{4A}(-\infty)$. F.T. Smith [45] gibt diesen Zahlenwert an: $F_{4A}(-\infty) = -1.2521$.
Für die Geschwindigkeitskomponente am unteren Scherschichtrand gilt demnach:

$$\boxed{\frac{v^*}{U_\infty} = 0.8347 \, \lambda^{\frac{1}{3}} \, Re^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t^*}{L^*} \right)^{-\frac{1}{3}}} \qquad (5.45)$$

Weit stromabwärts bildet die Scherschicht, Gl. (5.38), eine selbstähnliche Struktur aus. 'Weit stromabwärts' ist hier im asymptotischen Sinne zu verstehen: Die Scherschicht 4 hat selbst keine geometrische Länge als Bezugsgröße für eine dimensionslose Darstellung. Als natürlicher Längenmaßstab der Scherströmung tritt etwa $\nu/U_\infty = O(Re^{-1})$ auf. 'Weit stromabwärts' heißt somit: $t^* U_\infty/\nu \longrightarrow \infty$.

In diesem Bereich (Unterstruktur 4B) gelten die Ähnlichkeitsvariablen nach Tabelle 5.12:

t^*	η^*	Ψ^*	u^*	v^*
$s_{4B} = \dfrac{t^* - t_o^*}{L^*}$	$n_{4B} = \dfrac{\eta^*}{L^*} s_{4B}^{-\frac{1}{2}} Re^{\frac{1}{2}}$	$F_{4B} = \dfrac{\Psi^*_{4B}}{U_\infty L^*} s_{4B}^{-\frac{1}{2}} Re^{\frac{1}{2}}$	$u_{4B} = \dfrac{u^*}{U_\infty} = F'_{4B}$	$v_{4B} = \dfrac{v^*}{U_\infty} Re^{\frac{1}{2}} = s_{4B}^{-\frac{1}{2}} \left[-\dfrac{F_{4B}}{2} + \dfrac{n_{4B}}{2} F'_{4B} \right]$

Tabelle 5.12:
Variable im Feld 4B

t_o^* in Tab. 5.12 ist der fiktive Ursprung der selbstähnlichen Lösung, wobei gilt $t_o^* \to 0$ für $Re^{-1} \to 0$. Die DGL für F_{4B} lautet:

$$2 F_{4B}''' + F_{4B} F_{4B}'' = 0 \qquad (5.46)$$

Randbedingungen sind:

$n_{4B} \longrightarrow \infty$: $F'_{4B} = 1$

$n_{4B} \to -\infty$: $F'_{4B} = 0$

$n_{4B} = 0$: $F_{4B} = 0$

Die Lösung von Gl. (5.46) ergibt für den Wert F_{4B} am unteren Rand: $F_{4B}(-\infty) = -1.2384$, so daß für die Komponente der Quergeschwindigkeit gilt:

$$\frac{v^*}{U_\infty} = 0.6192\, Re^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t^* - t_0^*}{L^*} \right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (5.47)$$

Mit Gleichung (5.45) und (5.47) liegen somit die beiden Asymptoten für die Entrainment-Geschwindigkeiten am unteren Grenzschichtrand vor.
Da der Entrainment-Effekt die Strömung im Inneren des Ablösegebietes bewirken soll, kann jetzt bei bekannter Entrainment-Geschwindigkeit die Strömung im Gebiet 2 bestimmt werden. Für die Größe des im Ablösegebiet zurückfließenden Volumenstromes (pro Breite b^*) $Q_R \equiv Q_R^*/(U_\infty b^* L^*)$ gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Q_R deckt gerade den Entrainmentstrom der freien Scherschicht Q_E, d.h. $Q_R = Q_E$.

(b) $Q_R > Q_E$, was zur Folge hat, daß sich geschlossene Stromlinien ausbilden, die vollständig im Gebiet 2 liegen.

Das Batchelor-Modell, Kap. 5.2.3, zeigt aber gerade, daß die einzig physikalisch konsistente Beschreibung der Strömung für $Re^{-1} \to 0$ dann auf ein Innengebiet mit $\omega_o = \text{konst.} = O(1)$ führt. In Kap. 5.5 wurde gezeigt, daß dieses Modell nicht Grundlösung einer asymptotischen Entwicklung sein kann. Aus diesem Grunde muß im weiteren gelten, daß der zurückfließende Volumenstrom exakt den Entrainmentstrom liefert. D.h. die freie Scherschicht wirkt auf das Strömungsgebiet 2 wie eine mit Senken belegte Linie, die den gesammten Volumenstrom aufnimmt.
Für den Entrainment-Strom Q_E (Volumenstrom, der zwischen $t^* = 0$ und t^* auftritt) gilt:

$$Q_E \equiv \frac{Q_E^*}{U_\infty^* b^* L^*} = \int_0^{t^*/L^*} \frac{v^*}{U_\infty^*} d\left(\overline{\frac{t^*}{L^*}}\right) \qquad (5.48)$$

Das Lösungsgebiet 2 ist von der geometrischen Ausdehnung O(1) x O(1) bis auf einen Bereich in Ablösenähe, in dem die Berandung des Lösungsgebietes aufgrund der speziellen Trennstromlinienform Re-abhängig wird. In diesem Bereich ist eine Sonderbetrachtung in einem Untergebiet 2A erforderlich. Für $s^* \to 0$ gilt für die Trennstromlinie y_T (s. Gl. (5.11)):

$$y_T = \frac{n_T^*}{L^*} = y_{T,1} + Re^{-\frac{1}{16}} y_{T,2} + \dots$$

$$\text{mit:} \quad y_{T,1} = (2a)^{-1}\left(\frac{s^*}{L^*}\right)^2 + \frac{2}{5} c_1 \left(\frac{s^*}{L^*}\right)^{5/2} + \dots \qquad (5.49)$$

$$y_{T,2} = \frac{2}{3} c_0 \left(\frac{s^*}{L^*}\right)^{3/2}$$

In Gl. (5.49) ist gegenüber Gl. (5.11) zusätzlich die Wandkrümmung mit dem lokalen Krümmungsradius a berücksichtigt. Für $(s^*/L^*) \to 0$ sind somit folgende Fälle zu unterscheiden:

(1) $\left(\frac{s^*}{L^*}\right) \to 0 \;;\; O\left(\frac{s^*}{L^*}\right) \ll Re^{-\frac{1}{8}} \;:\; y_T \sim \frac{2}{3} c_0 Re^{-\frac{1}{16}} \left(\frac{s^*}{L^*}\right)^{3/2}$

(2) $\left(\frac{s^*}{L^*}\right) \to 0 \;;\; O\left(\frac{s^*}{L^*}\right) \gg Re^{-\frac{1}{8}} \;:\; y_T \sim (2a)^{-1}\left(\frac{s^*}{L^*}\right)^2 + \frac{2}{5} c_1 \left(\frac{s^*}{L^*}\right)^{5/2} + \dots$

Für $s^*/L^* = O(Re^{-1/8})$ sind beide Terme der Entwicklung (5.49) von der gleichen Größenordnung, was damit die unabhängigen Variablen des Übergangsgebietes 2A zu $O(Re^{-1/8})$ und $O(Re^{-1/4})$ festlegt. Die Bedingung der Anpaßbarkeit (matching) an die Scher-

schicht (Bereich 4A) erfordert eine Stromfunktion $\Psi^* = O(Re^{7/12})$ Damit liegt die Streckung aller Variablen fest, wie Tabelle 5.13 zeigt:

s^*	n^*	Ψ^*	u^*	v^*	p^*
$s_{2A} = \frac{s^*}{L^*} Re^{-\frac{1}{8}}$	$n_{2A} = \frac{n^*}{L^*} Re^{\frac{1}{4}}$	$\Psi_{2A} = \frac{\Psi^*_{2A}}{U_\infty L^*} Re^{\frac{7}{12}}$	$u_{2A} = \frac{u^*}{U_\infty} Re^{\frac{1}{3}}$	$v_{2A} = \frac{v^*}{U_\infty} Re^{\frac{1}{2}}$	$p_{2A} = \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho U_\infty^2} Re^{\frac{2}{3}}$

Tabelle 5.13: Variable im Feld 2A

In diesen Variablen lautet die Trennstromlinie:

$$y_{TA} \equiv \frac{n_T^*}{L^*} Re^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} c_o s_{2A}^{3/2} + (2a)^{-1} s_{2A}^2 + O(Re^{-\frac{1}{16}}) \qquad (5.50)$$

Die Navier-Stokes Gleichungen ergeben in den Variablen des Bereiches 2A zur niedrigsten Ordnung folgendes DGL-System:

$$\frac{\partial \Psi_{2A}}{\partial n_{2A}} \frac{\partial^2 \Psi_{2A}}{\partial n_{2A} \partial s_{2A}} - \frac{\partial \Psi_{2A}}{\partial s_{2A}} \frac{\partial^2 \Psi_{2A}}{\partial n_{2A}^2} = - \frac{\partial p_{2A}}{\partial s_{2A}} \qquad (5.51)$$

$$\frac{\partial p_{2A}}{\partial n_{2A}} = 0 \qquad (5.52)$$

mit den Randbedingungen:

$$n_{2A} = 0 \; : \quad \Psi_{2A} = 0 \qquad (5.53)$$

$$n_{2A} = y_{TA} \; : \quad \Psi_{2A} = F_{4A}(-\infty) s_{2A}^{2/3} \qquad (5.54)$$

Die Randbedingung (5.54) ergibt sich unmittelbar aus Gleichung (5.45), also dem Matching-Prozeß mit der freien Scherschicht.

Die Gleichungen (5.51), (5.52) beschreiben als reibungslose Gleichungen ein Gebiet konstanten Gesamtdrucks, so daß aus Gl. (5.52) unmittelbar folgt:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi_{2R}}{\partial n_{2R}^2} = 0} \qquad (5.55)$$

Nach zweifacher Integration ergibt sich damit aus Gl. (5.51):

$$\Psi_{2R} = \sqrt{-2 p_{2R}}\; n_{2R}$$

Mit $p_{2R} = -\frac{1}{2} u_{2R}^2$ gilt:

$$\boxed{\Psi_{2R} = - u_{2R}\, n_{2R}} \qquad (5.56)$$

Das negative Vorzeichen in Gl. (5.56) berücksichtigt, daß die Strömung gegen die positive Koordinatenrichtung erfolgt.
Da u_{2R} quer zur Strömungsrichtung konstant ist (vgl. Gl. (5.55)), kann dieser Wert auf einfache Weise aus dem Entrainment-Strom $Q_E = Q_R$ (s. Gl. (5.48)) ermittelt werden, wenn Gleichung (5.45) verwendet wird:

$$u_{2R} = \frac{Re^{7/12} Q_E}{y_{TR}} = \frac{Re^{7/12} \int_0^{t^*/L^*} \frac{v^*}{U_\infty}\, d\left(\overline{\frac{t^*}{L^*}}\right)}{y_{TR}} = - \frac{F_{4R}(-\infty)\, \lambda^{1/3} s_{2R}^{2/3}}{y_{TR}}$$

Mit y_{TR} nach Gleichung (5.50) ist Ψ_{2R} damit:

$$\boxed{\Psi_{2R} = \frac{F_{4R}(-\infty)\, \lambda^{1/3}\, n_{2R}}{\frac{2c_Q}{3} s_{2R}^{5/6} + (2a)^{-1} s_{2R}^{4/3}}} \qquad (5.57)$$

Für $s_{2R} \to 0$ schließt das Gebiet 2A an das 'lower deck' des Ablöse-Triple-Decks an ($\lambda \to \infty$), so daß hier die Matching-Bedingung (5.43) erfüllt sein muß.
Um dies nachzuweisen, ist es sinnvoll, die Lösung (5.57) für den Grenzfall $s_{2R} \to 0$ näher zu untersuchen.
Betrachtet man Gl. (5.57) als Reihenentwicklung in s_{2R}, so gilt für $s_{2R} \to 0$:

$$\Psi_{2R} = \frac{F_{1R}(-\infty)\,\lambda^{1/3}\,\eta_{2R}}{2c_0/3}\, s_{2R}^{-3/6} + O(s^{-1/3}) \qquad (5.58)$$

und gleichzeitig (nach Gl. (5.50)):

$$y_{TR} = \frac{2}{3} c_0\, s_{2R}^{3/2} + O(s_{2R}^2) \qquad (5.59)$$

Einem Vorschlag von Sychev [54] folgend kann Gl. (5.57) für $s_{2R} \to 0$ als selbstähnliche Lösung gewonnen werden, wenn als Ähnlichkeitsvariable $\eta_{2RR} = \eta_{2R}\, s_{2R}^{-3/2}$ gewählt wird, wie Gleichung (5.59) dies nahelegt.

s^*	η^*	Ψ^*	p^*
$s_{2RR} = \frac{s^*}{L^*}$	$\eta_{2RR} = \frac{\eta^*}{L^*}\, s_{2RR}^{-3/2}\, Re^{1/16}$	$F_{2RR} = \frac{\Psi^*_{2RR}}{U_\infty L^*}\, s_{2RR}^{-2/3}\, Re^{1/2}$	$p_{2RR} = \frac{p^* - p_0^*}{\rho U_\infty^2}\, s_{2RR}^{5/3}\, Re^{7/8}$

Tabelle 5.14: Variable im Feld 2AA

Mit der folgerichtigen Skalierung der Variablen nach Tabelle 5.14 ergibt sich durch Einsetzen in Gl. (5.51), (5.52) folgende DGL:

$$\frac{9}{2}\,\eta_{2RR} F'_{2RR} F''_{2RR} + \frac{5}{2} F'^2_{2RR} + 5\, p_{2RR} = 0 \qquad (5.60)$$

Mit den Randbedingungen:

$$\eta_{2AA} = 0 \quad : \quad F_{2AA} = 0$$

$$\eta_{2AA} = \frac{2}{3} c_o \quad : \quad F_{2AA} = F_{4A}(-\infty)$$

Für $s_{2A} \to 0$ gilt also: $\dfrac{\psi^*}{U_\infty L^*} = F_{2AA}\, s_{2AA}^{2/3}\, Re^{-1/2}$, was in 'lower deck'-

Variablen umgeschrieben heißt:

$$\boxed{\frac{\psi^*}{U_\infty L^*} Re^{3/4} = F_{2AA} \left[\frac{s^*}{L^*} Re^{3/8} \right]^{\frac{2}{3}}} \qquad (5.61)$$

und im Vergleich zu (5.43) zeigt, daß die Matching-Bedingung erfüllt ist.
Die Lösung im Bereich 2A, Gl. (5.57), ergibt unmittelbar folgende Beziehungen für die Geschwindigkeit bzw. den Druck in diesem Gebiet ($s = s^*/L^*$):

$$\boxed{\frac{u^*}{U_\infty} = F_{4A}(-\infty)\, Re^{-1/2} \left[\frac{2}{3} c_o Re^{-1/16} s^{5/6} + (2a)^{-1} s^{4/3} \right]^{-1}} \qquad (5.62)$$

$$\boxed{\frac{p^* - p_o^*}{\rho U_\infty^2} = -\frac{1}{2} F_{4A}^2(-\infty)\, Re^{-1} \left[\frac{2}{3} c_o Re^{-1/16} s^{5/6} + (2a)^{-1} s^{4/3} \right]^{-2}} \qquad (5.63)$$

Für $s \to 0$ bedeutet dies für den Druck ($p = p^* - p_o^* / \rho U_\infty^2$) :

$$\boxed{p \sim -\frac{9 F_{4A}^2(-\infty)\, Re^{-7/8}}{8 c_o^2} s^{-5/3}} \qquad (5.64)$$

Bild 5.39 skizziert diesen Verlauf. Das Ergebnis ist von außerordentlicher Bedeutung, weil es bei diesem Druckverlauf zu keiner weiteren Ablösung im Innengebiet bei Annäherung an S_A kommt!

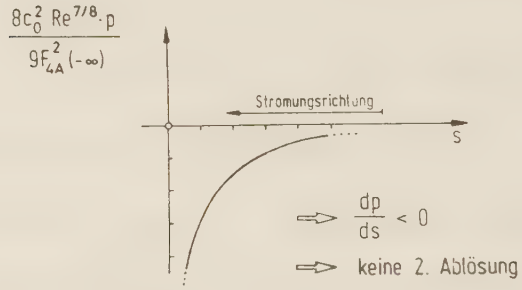


Bild 5.39: Skizze des Druckverlaufes für $s \to 0$

Der Anschluß zwischen den Gebieten 2A und 2 erfolgt für $s_{2A} \to \infty$. Nach Gl. (5.57) gilt für diesen Grenzfall:

$$\Psi_{2A} = \frac{2\,a\,F_{4A}(-\infty)\,n_{2A}}{s_{2A}^{4/3}} \qquad (5.65)$$

Da das Gebiet 2 von der Größe O(1) x O(1) ist, sind die unabhängigen Variablen $s_2 = x^*/L^*$ und $n_2 = y^*/L^*$, so daß nach Gl. (5.65), umgeschrieben zu:

$$\frac{\Psi^*}{U_\infty L^*} Re^{1/2} = \frac{2\,a\,F_{4A}(-\infty)\,n_2}{s_2^{4/3}}$$

gilt: $\Psi_2^* = O(Re^{-1/2})$. Analog gilt z.B. für die Geschwindigkeit in 2: $u^* = O(Re^{-1/2})$. Tabelle 5.15 enthält die Variablen im Gebiet 2:

x^*	y^*	Ψ^*	u^*	v^*	p^*
$s_2 =$ $\frac{x^*}{L^*}$	$n_2 =$ $\frac{y^*}{L^*}$	$\Psi_2 =$ $\frac{\Psi_2^*}{U_\infty L^*} Re^{1/2}$	$u_2 =$ $\frac{u^*}{U_\infty} Re^{1/2}$	$v_2 =$ $\frac{v^*}{U_\infty} Re^{1/2}$	$p_2 =$ $\frac{p^* - p_0^*}{\rho U_\infty^2} Re$

Tabelle 5.15: Variable im Feld 2

Einsetzen in die Navier-Stokes Gleichungen ergibt folgende DGL für Ψ_2 :

$$\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial s_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial n_2^2} = - \omega(\Psi_2) \qquad (5.66)$$

mit den Randbedingungen:

$$n_2 = y_K \quad : \quad \Psi_2 = 0$$

$$n_2 = y_T \quad : \quad \Psi_2 = \Psi_4(s_4, -\infty)$$

Ψ_4 nach Gleichung (5.38).
Gl. (5.66) beschreibt eine reibungslose, aber drehungsbehaftete Strömung, die den im Wiederanlegegebiet umgelenkten Teil der freien Scherschicht dieser Scherschicht als Entrainment-Strom wieder zuführt.
An dieser Stelle kommt es zum ersten Bruch in der asymptotischen Beschreibung des Gesamtbildes, der aber u.U. im Zusammenhang mit einer unzureichenden Modellvorstellung der Vorgänge beim Wiederanlegen steht:

Ein einfaches Umlenken der Strömung unterhalb der Trennstromlinie führt zu einer Rückströmgeschwindigkeit $u^*=O(1)$, da die Geschwindigkeit im Bereich 4 (Scherschicht) ebenfalls von der Größenordnung O(1) ist, wie Tabelle 5.10 zeigt. Ein direktes Anpassen (matching) an Gebiet 2, in dem $u_2^*=O(Re^{-1/2})$ gilt, ist also nicht möglich.
Ein Übergangsbereich, ähnlich wie 2A in der Nähe des Ablösepunktes könnte die Geschwindigkeit aber nur dann von O(1) auf $O(Re^{-1/2})$ bringen, wenn der Verlauf der Trennstromlinie hier ebenfalls Re-Zahl-abhängig wäre.
Unter der gewählten Modellvorstellung des Wiederanlegeprozesses (s. folgender Abschnitt) bleibt zunächst nur der Ausweg, einen Bereich 2B zu postulieren, der mit $u^*=O(Re^{-1/2})$ an Bereich 2 angepaßt werden kann. Aus Kontinuitätsgründen muß dieser eine Längserstreckung O(1) haben (damit der Volumenstrom $Q_R^*=O(Re^{-1/2})$ in das Gebiet 2 strömen kann).
Der Wiederanlegeprozeß selbst ist von der freien Scherschicht gespeist. Als einfache Umlenkung in einem reibungslosen Prozeß ('what goes in,comes out') erfolgt dieser in Variablen, die durch die ankommende freie Scherschicht festgelegt sind (s. Tabelle 5.16):

r^*	n^*	Ψ^*	u^*	v^*	p^*
$s_6=$	$n_6=$	$\Psi_6=$	$u_6=$	$v_6=$	$p_6=$
$\frac{r^*}{L^*}Re^{1/2}$	$\frac{n^*}{L^*}Re^{1/2}$	$\frac{\Psi_6^*}{U_\infty L^*}Re^{1/2}$	$\frac{u^*}{U_\infty}$	$\frac{v^*}{U_\infty}$	$\frac{p^*-p_0^*}{\rho U_\infty^2}$

Tabelle 5.16: Variable im Feld 6

Diese Variablen in die Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt ergeben als reibungsloses System die Euler-Gleichungen:

$$u_\delta \frac{\partial u_\delta}{\partial s_\delta} + v_\delta \frac{\partial u_\delta}{\partial n_\delta} = - \frac{\partial p_\delta}{\partial s_\delta}$$

$$u_\delta \frac{\partial v_\delta}{\partial s_\delta} + v_\delta \frac{\partial v_\delta}{\partial n_\delta} = - \frac{\partial p_\delta}{\partial n_\delta} \qquad (5.67)$$

Bild 5.40 ist eine Skizze dieses Prozesses, die zeigt, daß wandnahe Reibungsschichten erforderlich sind, um die Haftbedingung an der Wand zu erfüllen.

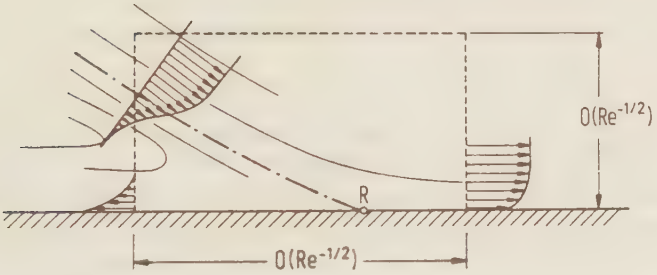


Bild 5.40: Skizze der Strömungsvorgänge im Wiederanlegebereich

In dieser wandnahen Schicht 6A müssen Reibungs- und Trägheitskräfte von derselben Größenordnung sein: Mit $u^*_{6A}=O(1)$, $s^*_{6A}=O(Re^{-1/2})$; $n^*_{6A}=O(Re^{-\gamma})$ gilt:

Trägheitskräfte: $u\frac{\partial u}{\partial s}=O(Re^{1/2})$

Reibungskräfte: $Re^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}=O(Re^{-1+2\gamma})$

womit für γ folgt: $\gamma=3/4$

Mit den Variablen nach Tabelle 5.17 ergeben sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen wieder die einfachen Grenzschichtgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} u_{6A}\frac{\partial u_{6A}}{\partial s_{6A}}+v_{6A}\frac{\partial u_{6A}}{\partial n_{6A}}&=-\frac{dp_{6A}}{ds_{6A}}+\frac{\partial^2 u_{6A}}{\partial n_{6A}^2}\\ \frac{\partial u_{6A}}{\partial s_{6A}}+\frac{\partial v_{6A}}{\partial n_{6A}}&=0\end{aligned}} \qquad (5.68)$$

wobei $p_{6A}(s_{6A})=p_6(s_6,0)$, die Randbedingungen lauten:

$$n_{6A}=0 \;:\; u_{6A}=v_{6A}=0$$

$$n_{6A}\to\infty \;:\; u_{6A}=u_6(0)$$

Im zuvor geforderten Übergangsbereich 2B muß diese Wandgrenzschicht von der Dicke $O(Re^{-3/4})$ im Bereich 6A auf eine Dicke $O(Re^{-1/4})$ gebracht werden, wie eine Analyse der wandnahen Reibungsschicht im Gebiet 2 zeigt:
'Außenströmung' ist hier die reibungslose Strömung nach Gl. (5.66), so daß eine Abschätzung von Reibungs- und Trägheitskräften hier ergibt: ($u=O(Re^{-1/2})$, $s=O(1)$, $n=O(Re^{-\delta})$)

Trägheitskräfte: $u\frac{\partial u}{\partial s}=O(Re^{-1})$

Reibungskräfte: $Re^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}=O(Re^{-3/2+2\delta})$

womit für δ folgt: $\delta = 1/4$

Wieder ergeben sich die Grenzschichtgleichungen, Gl. (5.68), mit der entsprechend geänderten Indizierung, wenn die Variablen nach Tabelle 5.17 Verwendung finden.

r^*	n^*	Ψ^*	u^*	v^*	p^*
$s_7 =$	$n_7 =$	$\Psi_7 =$	$u_7 =$	$v_7 =$	$p_7 =$
$\frac{r^*}{L^*}$	$\frac{n^*}{L^*}Re^{1/4}$	$\frac{\Psi_7^*}{U_\infty L^*}Re^{3/4}$	$\frac{u^*}{U_\infty}Re^{1/2}$	$\frac{v^*}{U_\infty}Re^{3/4}$	$\frac{p^*-p_\infty^*}{\rho U_\infty^2}Re$

Tabelle 5.17: Variable im Feld 7

Es gilt $p_7(s_7) = p_2(s_2, n_K)$; die Randbedingungen lauten:

$$n_7 = 0 \quad : \quad u_7 = v_7 = 0$$

$$n_7 \to \infty \quad : \quad u_7 = u_2(s_2, n_K) = \frac{u_2^*}{U_\infty}Re^{1/2}$$

Diese Wandgrenzschicht strömt in Richtung auf den Ablösepunkt S_R und kommt somit in den Wirkungsbereich des Übergangsgebietes 2A. Eine analoge Betrachtung der Reibungs- und Trägheitskräfte wie im Gebiet 7 führt unter der Wirkung der 'Außenströmung' aus 2A zu:

$$s_{2R} \to \infty : \quad \delta = \frac{1}{4} \quad \text{(vgl. diese Seite oben!)}$$

$$s_{2R} \to 0 : \quad \delta = \frac{9}{32}$$

Der Übergangsbereich 2A verändert die rückströmende Grenzschicht 7 so, daß ein Anpassen (matching) an das Ablöse-Triple-Deck möglich wird, wie anschließend gezeigt werden soll. Für $s_{2A} \to 0$ bildet sich unter der 'Außenströmung'

$$\boxed{\frac{u^*}{U_\infty} = \frac{3}{2} c_o^{-1} F_{4A}(-\infty)\, Re^{-7/16} s^{-5/6}} \qquad (5.69)$$

die unmittelbar aus Gl. (5.57) folgt, eine selbstähnliche Strömung aus, wobei als Ähnlichkeitsvariable

$$\eta_{7A} = \left(\frac{A}{12}\right)^{\frac{1}{2}} Re^{\frac{9}{32}} \left(\frac{n^*}{L^*}\right) \left(\frac{s^*}{L^*}\right)^{-\frac{11}{12}}$$

gewählt wird, mit:

$$A = \frac{3 F_{4A}(-\infty)}{2 c_o}$$

Mit der Streckung nach Tabelle 5.18 gilt die DGL:

$$\boxed{F_{7A}''' + F_{7A} F_{7A}'' + 10 F_{7A}'^2 - 10 = 0} \qquad (5.70)$$

mit den Randbedingungen:

$$\eta_{7A} = 0 : \quad F_{7A} = F_{7A}' = 0$$

$$\eta_{7A} \to \infty : \quad F_{7A}' = A^{-1} F_{2AA}'(0)$$

Die Stromfunktion F_{7A} läßt folgende Umschreibung in 'lower deck'-Variablen (des Ablöse-Triple-Decks) zu, was die Anpaßbarkeit an den Bereich 5 zeigt:

$$\frac{\Psi_{7A}^*}{U_\infty L^*} Re^{\frac{3}{4}} = F_{7A}(12A)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{s^*}{L^*} Re^{\frac{3}{8}}\right]^{\frac{1}{12}}$$

s^*	n^*	Ψ^*
$s_{7A} =$ $\frac{s^*}{L^*}$	$n_{7A} =$ $\left(\frac{A}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n^*}{L^*} s_{7A}^{-\frac{11}{12}} Re^{\frac{9}{32}}$	$F_{7A} =$ $\frac{\Psi^*_{7A}}{U_\infty L^*} (12\,A)^{-\frac{1}{2}} s_{7A}^{-\frac{1}{12}} Re^{\frac{23}{32}}$

Tabelle 5.18: Variable im Feld 7A

Tabelle 5.19 gibt eine Zusammenfassung der in diesem Kapitel verwendeten Variablen der einzelnen Untergebiete.

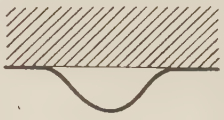
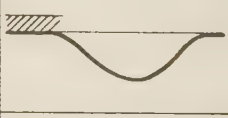
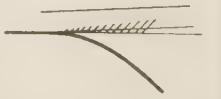
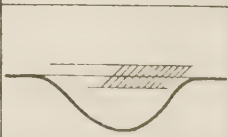
Nr.	IN STRÖMUNGS-RICHTUNG	QUER ZUR STR-RICHT.	STROMFKT.	Gl.	SKIZZE DES GÜLTIGKEITSBER.
1	$s_1 = \frac{x^*}{L^*}$	$n_1 = \frac{y^*}{L^*}$	$\Psi_1 = \frac{\Psi_1^*}{U_\infty L^*}$	(5.14)	
2	$s_2 = \frac{x^*}{L^*}$	$n_2 = \frac{y^*}{L^*}$	$\Psi_2 = \frac{\Psi_2^*}{U_\infty L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	(5.66)	
2A	$s_{2A} = \frac{s^*}{L^*} Re^{\frac{1}{8}}$	$n_{2A} = \frac{n^*}{L^*} Re^{\frac{1}{4}}$	$\Psi_{2A} = \frac{\Psi_{2A}^*}{U_\infty L^*} Re^{\frac{7}{12}}$	(5.51) (5.52)	
2AA	$s_{2AA} = \frac{s^*}{L^*}$	$n_{2AA} = \frac{n^*}{L^*} s_{2AA}^{-\frac{3}{2}} Re^{\frac{1}{16}}$	$F_{2AA} = \frac{\Psi_{2AA}^*}{U_\infty L^*} s_{2AA}^{-\frac{2}{3}} Re^{\frac{1}{2}}$	(5.60)	
3	$s_3 = \frac{-s^*}{L^*}$	$n_3 = \frac{n^*}{L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	$\Psi_3 = \frac{\Psi_3^*}{U_\infty L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	GS-Gl. 1. Ord.	
4	$s_4 = \frac{t^*}{L^*}$	$n_4 = \frac{n^*}{L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	$\Psi_4 = \frac{\Psi_4^*}{U_\infty L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	(5.38)	
4A	$s_{4A} = \frac{t^*}{L^*}$	$n_{4A} = \frac{n^*}{L^*} s_{4A}^{-\frac{1}{2}} Re^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{3}}$	$F_{4A} = \frac{\Psi_{4A}^*}{U_\infty L^*} s_{4A}^{-\frac{2}{3}} Re^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{3}}$	(5.42)	
4B	$s_{4B} = \frac{t^* - t_0^*}{L^*}$	$n_{4B} = \frac{n^*}{L^*} s_{4B}^{-\frac{1}{2}} Re^{\frac{1}{2}}$	$F_{4B} = \frac{\Psi_{4B}^*}{U_\infty L^*} s_{4B}^{-\frac{1}{2}} Re^{\frac{1}{2}}$	(5.46)	

Tabelle 5.19: Approximationsfelder bei abgelöster Strömung

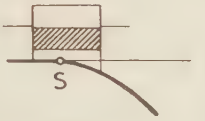
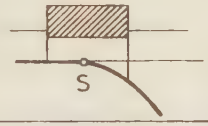
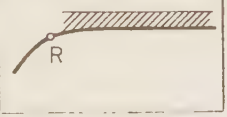
Nr.	IN STRÖMUNGS-RICHTUNG	QUER ZUR STR.RICHT.	STROMFKT.	Gl.	SKIZZE DES GÜLTIGKEITSBER.
5A	$s_{5A} = \frac{s^*}{L^*} Re^{\frac{3}{8}} \lambda^{\frac{5}{4}}$	$n_{5A} = \frac{n^*}{L^*} Re^{\frac{5}{8}} \lambda^{\frac{3}{4}}$	$\Psi_{5A} = \frac{\Psi^*_{5A}}{U_\infty L^*} Re^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{1}{2}}$	(3.16)	
5B	$s_{5B} = \frac{s^*}{L^*} Re^{\frac{3}{8}}$	$n_{5B} = \frac{n^*}{L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	$\Psi_{5B} = \frac{\Psi^*_{5B}}{U_\infty L^*} Re^{\frac{5}{8}}$	(3.4) (3.5)	
5C	$s_{5C} = \frac{s^*}{L^*} Re^{\frac{3}{8}}$	$n_{5C} = \frac{n^*}{L^*} Re^{\frac{3}{8}}$	$\Psi_{5C} = \frac{\Psi^*_{5C}}{U_\infty L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	(3.10)	
6	$s_6 = \frac{r^*}{L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	$n_6 = \frac{n^*}{L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	$\Psi_6 = \frac{\Psi^*_6}{U_\infty L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	(5.67)	
6A	$s_{6A} = \frac{r^*}{L^*} Re^{\frac{1}{2}}$	$n_{6A} = \frac{n^*}{L^*} Re^{\frac{3}{4}}$	$\Psi_{6A} = \frac{\Psi^*_{6A}}{U_\infty L^*} Re^{\frac{3}{4}}$	(5.68)	
7	$s_7 = \frac{r^*}{L^*}$	$n_7 = \frac{n^*}{L^*} Re^{\frac{1}{4}}$	$\Psi_7 = \frac{\Psi^*_7}{U_\infty L^*} Re^{\frac{3}{4}}$	wie (5.68)	
7A	$s_{7A} = \frac{s^*}{L^*}$	$n_{7A} = \frac{n^*}{L^*} \left(\frac{a}{12}\right)^{\frac{1}{2}} s_{7A}^{-\frac{11}{12}} Re^{-\frac{9}{32}}$	$F_{7A} = \frac{\Psi^*_{7A}}{U_\infty L^*} (12a)^{-\frac{1}{2}} s_{7A}^{-\frac{1}{12}} Re^{\frac{23}{32}}$	(5.70)	
8	$s_8 = \frac{r^*}{L^*}$	$n_8 = \frac{n^*}{L^*} Re^{1/2}$	$\Psi_8 = \frac{\Psi^*_8}{U_\infty L^*} Re^{1/2}$	GS-Gl. 1. Ord.	

Tabelle 5.19 / Fortsetzung

6. Diskussion

Mit diesem Kapitel ist beabsichtigt:

- eine Zusammenfassung der gewonnenen Ergebnisse zu geben ,
- wichtige Aspekte für die Beschreibung abgelöster Strömungen mit Hilfe der asymptotischen Theorie zu diskutieren ,
- die eingangs gestellten Fragen (Kap. 1) aufzugreifen.

6.1. Ergebnisse

Es sollen in 6 Punkten die wichtigsten Ergebnisse zusammengefaßt werden:

[I] Die Anwendung der asymptotischen Theorie mit der Re-Zahl als Störparameter ermöglicht zwei Wege, die Goldstein-Singularität zu vermeiden. Diese beiden Möglichkeiten stellen zwei verschiedene Grenzfälle eines in Kap. 2.3.4 definierten Parameters $\varkappa$ dar.
Die Arbeit zeigt, daß es sinnvoll ist, diese Grenzfälle getrennt zu betrachten und auch in der jeweiligen Nomenklatur deutlich zu unterscheiden. Diese Arbeit ordnet verschiedene, in der Literatur oftmals unklar definierte Begriffe in ein solches Schema ein.

[II] Im Falle der Grenzschichten mit Rückströmung ($\varkappa^{-1} \to 0$; Kap. 4) erweist sich der Wechselwirkungsprozeß zwischen Grenzschicht- und Außenströmung - wie zuvor schon vielfach in der Literatur beschrieben - als entscheidend wichtiger Faktor. Die mathematische Behandlung dieses

Vorganges kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Jede der vier in dieser Arbeit behandelten Möglichkeiten ist unterschiedlich einsetzbar und aussagekräftig. Das nachfolgende Bild 6.1 soll einen groben Überblick geben:

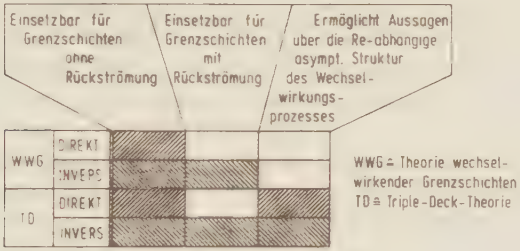


Bild 6.1: Einsatzmöglichkeiten von WWG- und Triple-Deck -Theorie

[III] Mit Hilfe des Begriffes der 'relevanten Euler-Lösung' können Kriterien aufgestellt werden, die Modellvorstellungen erfüllen müssen, wenn sie als Grundlösung einer asymptotischen Entwicklung für den zweiten Grenzfall, $\varkappa \to 0$, Verwendung finden sollen.

[IV] Mit Hilfe dieser Kriterien kann das sog. Batchelor-Modell (mit endlich vielen Untergebieten gleicher Drehungsrichtung) als Grundlösung einer asymptotischen Entwicklung, hier bezeichnet als 'rationales Strömungsmodell', ausgeschlossen werden.

[V] Als einziges Modell, das die aufgestellten Kriterien erfüllen kann, wurde das Modell der Totwasser-Strömung (Kirchhoff-Strömung) ermittelt, mithin eine Entartung des Batchelor-Modells zum Grenzfall $\omega_o \equiv 0$.

[VI] Das Kirchhoff-Modell kann in eine asymptotische Struktur für endliche Re-Zahlen eingepaßt werden. Lediglich in der Umgebung des Wiederanlegepunktes ist die Frage der vollständigen Anpaßbarkeit offen, was mit den weitgehend ungeklärten Vorgängen während des Wiederanlegeprozesses zusammenhängt.

6.2. Strömungsablösung und asymptotische Theorie

Wie in der Einleitung zu dieser Arbeit erwähnt, stellt die asymptotische Theorie einen möglichen Weg zur Erfassung des Phänomens Strömungsablösung dar. Es hat sich herausgestellt, daß es sinnvoll ist, zusätzlich zum eigentlichen asymptotischen Grenzprozeß $Re^{-1} \to 0$ zunächst die Grenzfälle des Parameters $\varkappa$ zu untersuchen.
Es handelt sich dabei nicht um eine streng asymptotische Betrachtung im Sinne einer entsprechenden (asymptotischen) Reihenentwicklung, wie sie etwa mit dem zusätzlichen Parameter $\varkappa_H$ in Kap. 4.2 durchgeführt worden ist. Wie mit Gleichung (2.16) gezeigt wurde, ist die Größe $\varkappa$ kein Parameter, der unmittelbar aus der dimensionslosen Schreibweise folgt, sondern eine Kombination der drei Systemparameter $\varkappa_H, \varkappa_L$ und Re , der

allerdings eine anschauliche physikalische Interpretation in der Terminologie der asymptotischen Theorie zuläßt.
In diesem Sinne stellen die gewonnenen Grenzlösungen ($\varkappa \to 0$ und $\varkappa^{-1} \to 0$) die 'Asymptoten' des $\varkappa$-Feldes dar. Eine Zuordnung der Fälle, in denen $\varkappa$ von der Größenordnung 'Eins' ist, zu einer der beiden Grenzfälle ist a priori nicht möglich, sondern muß im konkreten Fall entschieden werden. Gemeint ist damit, daß zu entscheiden ist, ob ein bestimmter konkreter Fall (gegebene Geometrie bei bestimmter Re-Zahl) im asymptotischen Sinne als abgelöste Strömung oder als Grenzschicht mit Rückströmgebieten interpretiert wird.
In diesem Zusammenhang liegt die Frage nahe, ob es möglich ist, die Grenzbereiche in $\varkappa$ zur 'Überlappung' zu bringen, ob es also beispielsweise möglich ist, durch extreme Verkleinerung von $\varkappa$ mit der Modellvorstellung für $\varkappa^{-1} \to 0$ bis in Bereiche vorzudringen, die auch mit der Modellvorstellung für $\varkappa \to 0$ beschrieben werden können.
Zu den in Kap. 4, Bild 4.16, vorgestellten Beispielen gehören folgende $\varkappa$-Werte:

Beispiel I) $\varkappa \approx 3.07$

Beispiel II) $\varkappa \approx 2.82$

Beispiel III) $\varkappa \approx 2.31$

Für diese Bereiche zeigt Bild 4.16, daß keine wesentlichen Veränderungen im Strömungscharakter auftreten, also auch keine Tendenz zu einer Totwasser-Strömung (Kirchhoff-Strömung) auszumachen ist. Zu erwarten wäre in diesem Sinne z.B.:

- die Ausbildung eines konstanten Druckes im Rückströmbereich (stattdessen gilt eine Verteilung wie etwa in Bild 4.8 enthalten)
- höhere Geschwindigkeitsgradienten in der Nähe der Trennstromlinie $\Psi = 0$ und in der Nähe der Wand.

Um den letzten Punkt näher zu untersuchen, wurde ein im Sinne des Grenzfalles $\varkappa^{-1} \to 0$ extremes Beispiel, nämlich $\varkappa \approx 1$, gerechnet. In diesem Fall ist also die Dellentiefe mit der Dicke der ankommenden Grenzschicht vergleichbar. Bild 6.2 zeigt das Geschwindigkeitsprofil in Wandnähe etwa im Bereich der Dellenmitte.

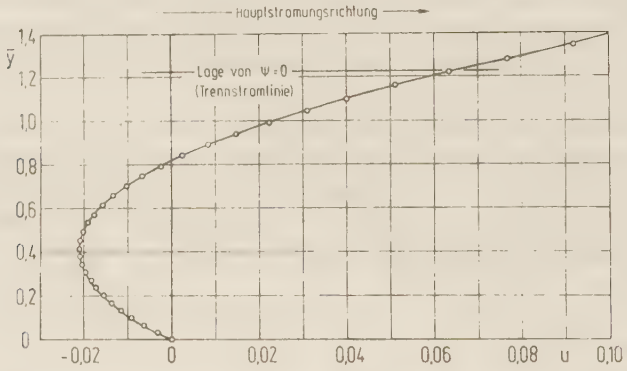


Bild 6.2: Geschwindigkeitsprofil im Rückströmbereich ; $\varkappa \approx 1.0$

Eine Tendenz zur Ausbildung von Scherschichten in der Nähe der Wand bzw. um die Trennstromlinie $\Psi=0$ ist nicht zu erkennen. Eine weitere Verkleinerung von $\varkappa$ führt zu Instabilitäten im Rechenverfahren und ist somit nicht möglich.
Bezüglich des eigentlichen asymptotischen Grenzprozesses, $Re^{-1} \to 0$, hat sich gezeigt, daß dieser zumindest im Fall $\varkappa^{-1} \to 0$ eine gute Näherung bis zu relativ kleinen Re-Zahlen darstellt. Die Triple-Deck-Theorie (asymptotische Beschreibung des Wechselwirkungsprozesses) stimmt mit der WWG-Theorie (Wechsel-

wirkungsprozeß für endliche Re-Zahlen) auch für kleine Re-Zahlen gut überein, obwohl nur Beziehungen asymptotischer Gleichheit zwischen beiden Theorien bestehen, wie z.B. Gl. (4.41), (4.42). Bild 4.16 zeigt diese Übereinstimmung. Abweichungen sind hauptsächlich stromabwärts zu verzeichnen, da hier die im Rahmen der Triple-Deck-Theorie vernachlässigten Effekte der Änderung der Grundströmung zum Tragen kommen. Bild 6.3 zeigt den Wert für die Schubspannung am Dellenende (also bei $\frac{x^*}{l^*}=\frac{1}{2}$) für die Beispiele aus Bild 4.16.

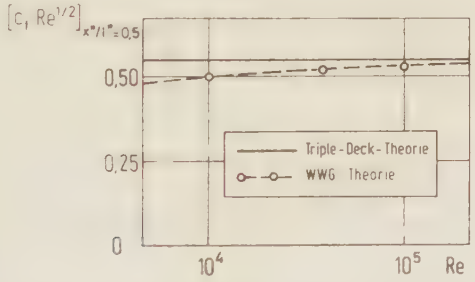


Bild 6.3: **Beispiel für die asymptotische Gleichheit von WWG- und Triple-Deck-Theorie**

Es ist deutlich zu erkennen, daß die Übereinstimmung beider Theorien für steigende Re-Zahlen zunimmt (asymptotische Gleichheit).

Wenn es auch nicht möglich ist, die beiden Grenzfälle in $\varkappa$ für kleine bzw. große $\varkappa$-Werte direkt aneinander anzufügen, so kann doch gezeigt werden, daß sie in der Tendenz zu konsistenten Aussagen führen (d.h. also für kleine $\varkappa$-Werte in Kap. 4 und große $\varkappa$-Werte in Kap. 5). Dies soll im folgenden an zwei Beispielen gezeigt werden:

(A) Ablöse- bzw. Rückströmgrenze

Der Ausgangspunkt für die Bestimmung des Grenzwertes H^*/l^* (relative Dellentiefe), für den erstmals Rückströmung bzw. Ablösung auftritt, sei eine Delle der hier stets gewählten Standardgeometrie mit fest vorgegebenen Größen l^* (Dellenlänge) und L^* (Vorderkanten-Abstand) gewählt. Das damit festgelegte Verhältnis dieser Größen ist in diesem Beispiel:

$$\varkappa_L = \frac{L^*}{l^*} = 5.0$$

Kap. 5 ($\varkappa \to 0$; Strömungen mit Ablösung) liefert als Ablösegrenze in diesem Fall (s. Kap. 5.3.3):

$$\boxed{\left.\frac{H^*}{l^*}\right|_{Abl.} = 2.2 \cdot 10^{-3}} \qquad (6.1)$$

Dieser Wert ist zu interpretieren als asymptotische Lösung für $Re^{-1} \to 0$.

Kap. 4 ($\varkappa^{-1} \to 0$; Grenzschichten mit Rückströmung) macht ebenfalls eine asymptotische Aussage für $Re^{-1} \to 0$, ist aber in der numerischen Auswertung auf endliche Re-Zahlen beschränkt, da andernfalls bestimmte Triple-Deck-Parameter (z.B. l_T bei festem L^*/l^*), die ursprünglich von der Größenordnung $O(1)$ sind, über alle Grenzen wachsen.
Für große, aber endliche Re-Zahlen ist der Grenzwert $\left.H^*/l^*\right|_{RS}$ (Index 'RS' $\hat{=}$ Rückströmung) wie folgt zu bestimmen:
Die Vorgabe einer Re-Zahl bestimmt zusammen mit dem Verhältnis L^*/l^* einen der zwei Triple-Deck-Parameter, in diesem Fall $\varkappa_2$. Aus Bild 4.6 kann jetzt der zur Rückström-Grenzkurve gehörige zweite Parameter ($\varkappa_1$) bestimmt werden. Die Auflösung nach der gesuchten relativen Dellentiefe ergibt:

$$\boxed{\left.\frac{H^*}{l^*}\right|_{RS} = \varkappa_1 Re^{-\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{1}{2}}} \qquad (6.2)$$

Gleichzeitig kann der zugehörige $\varkappa$-Wert ermittelt werden zu:

$$\varkappa = 5.0\, \lambda^{\frac{3}{4}}\, \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\, Re^{\frac{1}{8}} \qquad (6.3)$$

Der unterschiedliche Charakter des asymptotischen Grenzprozesses $Re^{-1} \to 0$ für die Strömungen aus Kap. 4 bzw. Kap. 5 läßt es sinnvoll erscheinen, die Ablöse- bzw. Rückströmgrenze als Funktion der Re-Zahl aufzutragen. In dieser Darstellung erscheint das Ergebnis aus Kap. 5, Gl. (6.1), als Asymptote für $Re^{-1} \to 0$, Ergebnisse aus Kap. 4, Gl. (6.2), sind in ihrem funktionalen Verlauf durch die Ermittlung einzelner Lösungspunkte bestimmt, wie Bild 6.4 zeigt. Der zusätzlich angegebene Parameter-Wert für $\varkappa$ zeigt für die Lösungen aus Kap. 4 die erwartete Abnahme mit steigender Re-Zahl.
Während die Triple-Deck-Theorie für vorgegebene Geometrien aus den soeben genannten Gründen einer Beschränkung in Richtung auf große Re-Zahlen unterliegt (Bild 6.4 zeigt Beispiele bis $Re = 10^6$), ist die in Kap. 4.3 beschriebene WWG-Theorie nur in Richtung auf kleine Re-Zahlen hin beschränkt (wie natürlich die Triple-Deck-Theorie als asymptotische Theorie für $Re^{-1} \to 0$ ebenfalls). In Kap. 4.3 wurde gezeigt, daß die Übereinstimmung bis zu niedrigen Re-Zahlen (s. z.B. Bild 4.16) sehr gut ist. Das heißt, daß die Rückströmgrenze in Bild 6.4, die bis zu beliebig großen Re-Zahlen mit Hilfe der WWG-Theorie bestimmt werden kann, in Bereichen endlicher Re-Zahlen mit der 'Triple-Deck-Rückströmgrenze' übereinstimmt.

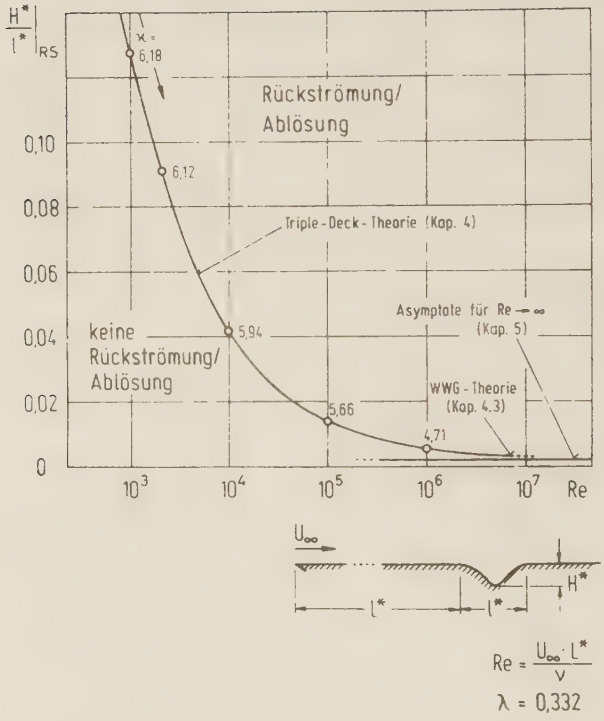


Bild 6.4: Rückström- bzw. Ablösegrenze am Beispiel der Delle mit $L^*/l^* = 5.0$

(B) Druckmaximum

Das Druckmaximum ist eine charakteristische Größe, die schon in Kap. 4.4 zur Darstellung von Ergebnissen in physikalischen Variablen verwendet wurde. Anhand dieser Größe kann gezeigt werden, wie die beiden Grenzfälle in $\varkappa$ zueinander angeordnet sind.

Wird das Verhältnis L^*/l^* konstant gehalten, so ist das ursprüngliche Drei-Parameter-System (s. Kap. 3.3.4) auf ein Zwei-

Parameter-System reduziert, was die räumliche Darstellung einer abhängigen Variablen, hier des Druckmaximums gestattet. Bild 6.5 zeigt den qualitativen Verlauf der Funktion $p(H^*/l^*, Re)$ für den festen Parameter L^*/l^*. Die im Raum aufgespannte Fläche ist durch Linien konstanter Re-Zahl dargestellt. Zwei wichtige Grenzkurven sind in der Ebene des Druckmaximums eingezeichnet:

- die Ablöse- bzw. Rückström-Grenzkurve (durchgezogene Linie in Bild 6.5). In der Projektion auf die Grundfläche ist dies die Grenzkurve aus Bild 6.4, wobei noch die unterschiedlichen Achsenbezeichnungen zu beachten sind. In Bild 6.5 wurde Re^{-1} als Koordinate gewählt, um den Grenzfall $Re^{-1}=0$ in die Vorderebene durch den Koordinatenursprung zu legen.
  In dieser Ebene tritt eine Unstetigkeit (Sprung) in der Lösung auf. Für $L^*/l^* = 5.0$ z.B. liegt der Sprung bei $H^*/l^* = 2.2 \cdot 10^{-3}$, s. Gl. (6.1). Für kleinere Werte H^*/l^* handelt es sich um eine anliegende Strömung mit einer verschwindend dünnen Grenzschicht ($\varkappa \to 0$, Kap. 5), so daß die Lösung aus der Potentialströmung über der Dellengeometrie folgt. Für größere Werte H^*/l^* liegt Strömungsablösung vor, für die im Grenzfall $Re^{-1}=0$ die Totwasserströmung ($p^* = p_\infty$) als Lösung gefunden wurde.

- Triple-Deck/ Prandtl-Grenzkurve (strichpunktierte Linie in Bild 6.5).
  Mit 'Prandtl-Bereich' ist hier die erweiterte Grenzschichttheorie (Kap. 5.6; $\varkappa \to 0$) bezeichnet. Dieser Bereich ist der Anschaulichkeit wegen durch eine feste Linie (strichpunktierte Kurve) gegen den 'Triple-Deck-Bereich' (Kap. 4; $\varkappa^{-1} \to 0$) abgegrenzt, obwohl der Übergang, wie bereits mehrfach erwähnt, kontinuierlich ist. Die strichpunktierte Linie stellt eine Kurve $\varkappa = \delta^*/H^* = \text{const.}$ dar.
  Der Kurvenverlauf in Bild 6.5 ist im 'Prandtl-Bereich' für $Re^{-1} \neq 0$ nicht durch Rechnungen gestützt, sondern als nahe-

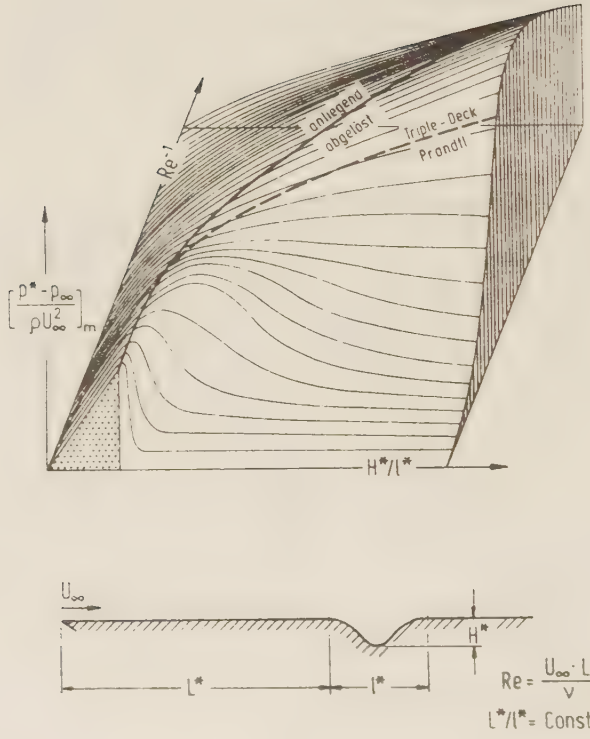


Bild 6.4: Druckmaximum als Funktion der relativen Dellentiefe und Re-Zahl bei festem Verhältnis L^*/l^*

liegende Interpolation zwischen den bekannten Lösungen in der Ebene $Re^{-1}=0$ und im Triple-Deck-Bereich (s. z.B. Bild 4.22) gewählt worden.
Daß dieser Verlauf in der Tendenz richtig ist, kann Bild 6.6 zeigen. Es ist hier für festes H^*/l^* und variable Vorderkantenabstände das Druckmaximum aufgetragen. Zwar gehört jeder Punkt in Bild 6.6 zu einer Strömung mit anderem Vorderkantenabstand, jedoch gehört zu jeder dieser Strömungen im Grenzfall $Re^{-1}=0$ der Druckbeiwert Null. Bild 6.6 zeigt für fallende Werte von $\varkappa$ (und damit in der Tendenz für $\varkappa \to 0$), daß der Maximaldruck abnimmt.

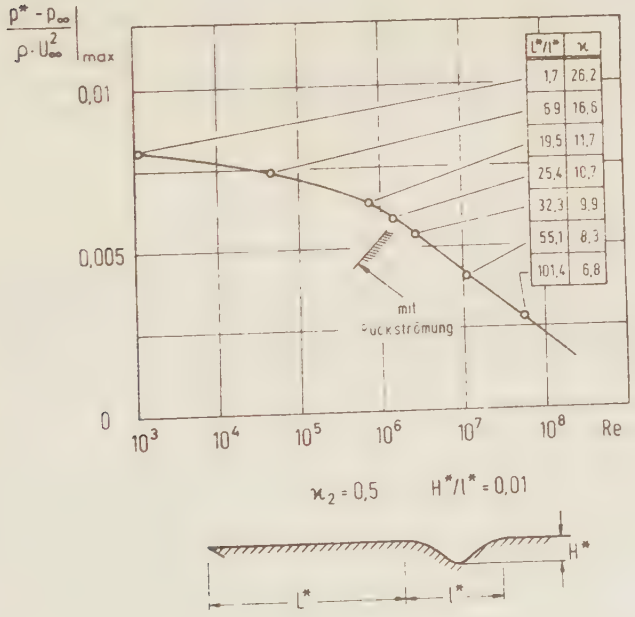


Bild 6.6: Druckmaximum als Funktion der Re-Zahl bei festem Verhältnis H^*/l^*

Ein wichtiges Ergebnis dieser Arbeit ist der Nachweis, daß das Batchelor-Modell als 'rationales Strömungsmodell' (s. Kap. 2.1) nicht geeignet ist; stattdessen ist die Kirchhoff-Strömung als Grundlösung einer asymptotischen Entwicklung zu verwenden. Ein Punkt, auf den bisher nicht näher eingegangen wurde, stützt dieses Ergebnis:

Es besteht mit der Kirchhoff-Modellvorstellung kein grundsätzlicher Unterschied mehr zwischen der asymptotischen Beschreibung von Rückströmgebieten der Länge $O(1)$, wie sie in dieser Arbeit behandelt wurden, und Gebieten der Länge $o(1)$, wie sie etwa am Kreiszylinder auftreten (s. F.T. Smith [45]). Auch im zweiten Fall konnte ausschließlich die modifizierte Kirchhoff-Strömung als Grundlösung einer asymptotischen Entwicklung Verwendung finden. Die Modifizierung bezieht sich dabei auf Gebiete in Entfernungen $o(1)$ vom Körper, so daß für beide Fälle in Körpernähe ('body scale flow' in [45]) die Kirchhoff-Strömung für $Re^{-1}=0$ gilt.

6.3. Schlußbemerkung

Die in der Einleitung gestellten grundsätzlichen Fragen zur Anwendung der asymptotischen Theorie großer Re-Zahlen bei Strömungsablösung sind in dieser Arbeit wohl weitgehend beantwortet, wenn auch nicht so eindeutig wie es vielleicht wünschenswert wäre.
Festzuhalten bleibt:
Die asymptotische Theorie für große Re-Zahlen ist prinzipiell in der Lage, abgelöste Strömungen zu beschreiben, wobei Details des Wiederanlegeprozesses zunächst noch offen sind. Dies geht allerdings mit einem extrem komplizierten Bild der Strömungsvorgänge einher. Eine einfache Zählung der Untergebiete, in die das Strömungsfeld zu zergliedern ist und die jeweils gesonderte Betrachtungen erforderlich machen, ergibt eine Zahl

in der Größenordnung von 15. Dies alleine läßt Zweifel an der Attraktivität der asymptotischen Betrachtung aufkommen, besonders wenn sie im Hinblick auf die Anwendung zur konkreten Problemlösung gesehen wird. Andererseits sollten die Stärken der asymptotischen Theorie in der Konkurrenz zur numerischen Lösung, wie sie im Einleitungskapitel herausgestellt worden sind, nicht übersehen werden.

7. Literaturverzeichnis

[1] R.C. Ackerberg: Boundary-layer Separation at a Free Streamline, Part 1, Two-dimensional Flow, JFM 44, pp. 211-225, 1970

[2] A. Acrivos et al: The steady separated flow past a circular cylinder at large Reynolds number, JFM, vol 21, part 4, 737-760, 1965

[3] G.K. Batchelor: On Steady Laminar Flow with Closed Streamlines at Large Reynolds Number, JFM 1, 177-190, 1955

[4] G.K. Batchelor: A Proposal Concerning Laminar Wakes Behind Bluff Bodies at Large Reynolds Number, JFM 1, 388-398, 1955

[5] G.K. Batchelor: An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1974

[6] P. Bradshaw: Prediction of Separation Using Boundary Layer Theory; AGARD LS 94, 11-18, 1978

[7] P.W.M. Brighton: Boundary Layer and Stratified Flows Past Obstacles; Dissertation, University of Cambridge, 1977

[8] O.R. Burggraf: Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows, JFM 24, 113-151, 1966

[9] O.R. Burggraf: Computational Study of Supersonic Flow over Backward-Facing Steps at High Reynolds Number, ARL 70-0275, 1970

[10] O.R. Burggraf: Asymptotic theory of separation and re-attachment of a laminar boundary layer on a compression ramp, AGARD CP 168, 1975, 10/1-9

[11] J.E. Carter: Inverse Boundary-Layer Theory and Comparison With Experiment, NASA Technical Paper 1208, 1978

[12] J.E. Carter: Inverse Solutions for Laminar Boundary Layer Flows with Separation and Reattachment, NASA-TR-R 447, 1975

[13] D. Catherall, K.W. Mangler: The integration of the two-dimensional laminar boundary-layer equations past the point of vanishing skin friction, JFM, vol. 26, part 1, 163-182, 1966

[14] T. Cebeci, P. Bradshaw: Momentum Transfer in Boundary Layers, Hemisphare Publishing Company, London Washington, 367-375, 1977

[15] S. Childress: Solutions of Euler's Equations containing Finite Eddies; The Physics of Fluids, Vol. 9, No. 5, 860-872, May 1966

[16] J.D. Cole: Perturbation Methods in Applied Mathematics, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Toronto, London, 1968; Neuauflage: J. Kevorkian, J.D. Cole: Perturbation Methods in Applied Mathematics; Applied Mathematical Sciences 34, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1981

[17] N. Curle, H.J. Davis: Modern Fluid Dynamics I, D. Van Nostrand Company LTD, London, 1968

[18] R.T. Davis, M.J. Werle: Numerical Methods for Interacting Boundary Layers, Proc. of the 1976 Heat Transfer & Fluid Mech. Inst., Stanford University Press, 317-339, 1976

[19] S.C.R. Dennis, C.Z. Chang: Numerical Solutions for Steady Flow past a Circular Cylinder at Reynolds Numbers up to 100, JFM 42, pp. 471-489, 1970

[20] D. Dijkstra: Separating, Incompressible, Laminar Boundary-Layer Flow over a Smooth Step of Small Height, Proc. 6th Int. Conf. on Num. Meth. Fl. Dyn., Lecture Notes in Physics 90, Springer Verlag, 169-176, 1979

[21] Van Dyke, M.: Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic Press, New York,London,1964

[22] I. Flügge-Lotz, T.A. Reyhner: The Interaction of a Shock-Wave with a laminar Boundary-Layer, Int. J. Non-linear Mech. 3, 173-199, 1968

[23] K. Gersten, F. Gross: Higher Order Boundary Layer Theory, Fluid Dynamic Transactions, vol. 7, part II, 7-36, Polish Academy of Sciences, Warshaw 1974

[24] K. Gersten, H. Herwig, P. Wauschkuhn: Theoretical and Experimental Investigations of Two-Dimensional Flows with Separated Regions of Finite Length AGARD-CP-291, 23/1-13, 1980

[25] S. Goldstein: On laminar boundary-layer flow near a position of separation, Quart. J. Mech. Appl. Math. 1, 43-69, 1948

[26] H.P. Horton: Numerical Investigations of Regular Laminar Boundary Layer Separation, AGARD-CP-168, 7/1-10, 1975

[27] S. Kaplun: Boundary layers and separation,Applied Mech. Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech., Munich, (Edt. H. Görtler), 729-732, 1964

[28] S. Kaplun: Fluid Mechanics and Singular Perturbations, Eds. P.A. Lagerstrom et al, Academic Press, New York, London, 1967

[29] H.B. Keller: Some Computational Problems in Boundary-Layer Flows, Lecture Notes in Physics, 35, 1-21, 1975

[30] H.B. Keller: Numerical Methods in Boundary-Layer-Theory, Ann. Rev. Fluid Mech., 10, 417-433, 1978

[31] H.B. Keller, T. Cebeci: Accurate Numerical Methods for Boundary-Layer Flows II: Two-Dimensional Turbulent Flows; AIAA, Vol. 10, No. 9, 1193-1199, 1972

[32] G. Kirchhoff: Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, J. reine angew. Math. 70, 289ff, 1869

[33] P.A. Lagerstrom: Solutions of the Navier-Stokes Equation at Large Reynolds Number; Proc. Int. Symp. on Mod. Develop. in Fluid Dyn.; J. Rom (Ed.), Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977

[34] E. Martensen: Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholm'schen Integralgleichung, Archives for Rational Mechanics and Analysis, 3, 235-270, 1959

[35] A. F. Messiter: Laminar Separation - A Local Asymptotic Flow Description for Constant Pressure Downstream, AGARD-CP-168, 4-1 bis 4-10, 1975

[36] A.F. Messiter: Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate, S.I.A.M. (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Appl. Math. 18, 241-257, 1970

[37] M. Napolitano, M.J. Werle, R.T. Davis: Numerical Technique for the Triple-Deck Problem, AIAA Journal, Vol. 17, No. 7, 699-705, 1979

[38] A.H. Nayfeh: Perturbation Methods, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1973

[39] V.YA. Neiland: Towards a theory of separation of the laminar boundary layer in a supersonic stream, Jzv. Akad. Nauk. SSSR, Mekk. Zhid. Gaza, No. 4, 53-57, 1969, Fluid Dyn. 4, 33-35, 1969

[40] K. Oswatitsch: Contributions to the Development of Gasdynamics, Ed. W. Schneider, M. Platzer, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1980

[41] A. Roshko: A New Hodograph for Free-Streamline Theory, NACA-TN-3168, 1954

[42] H. Schlichting: Grenzschichttheorie, G. Braun Verlag, Karlsruhe, 7. Auflage, 1979

[43] F.T. Smith: Laminar Flow over a Small Hump on a Flat Plate, JFM, vol. 57, part 4, 803-824, 1973

[44] F.T. Smith: The Laminar Separation of an Incompressible Fluid Streaming past a Smooth Surface, Proc. R. Soc. London, A 356, 443-463, 1977

[45] F.T. Smith: Laminar Flow of an Incompressible Fluid past a Bluff Body: the Separation, Reattachment, Eddy Properties and Drag, JFM, vol. 92, part 1, 171-205, 1979

[46] F.T. Smith; privater Schriftverkehr

[47] J.H.B. Smith: Behavior of a Vortex Sheet Separating from a Smooth Surface, RAE-TR-77058, 1977

[48] K. Stewartson, P.G. Williams: Self-Induced Separation, Proc. Roy. Soc. London, A 312, 181-206, 1969

[49] K. Stewartson: Multistructured Boundary Layers on Flat Plates and Related Bodies, Advances in Applied Mechanics, Vol. 14, 146-239, 1974

[50] K. Stewartson: On the Asymptotic Theory of Separated and Unseparated Fluid Motions, Proc. Int. Symp. on Mod. Develop. in Fluid Dyn., J. Rom (Ed.), Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977

[51] K. Stewartson: Is the singularity at separation removeable? JFM, vol. 44, part 2, 347-364, 1970

[52] R.V. Southwell, G. Vaisey: Relaxation Methods Applied to Engineering Problems, XII: Fluid Motions Characterized by 'Free' Streamlines, Phil. Trans. A 240, 117-161, 1946

[53] V.V. Sychev: On Laminar Fluid Flow Behind a Blunt Body at High Reynolds Numbers, Rep. to 8th Symp. Recent Problems in Mech. Liquids & Gases, Tarda, Poland, 1967

[54] V.V. Sychev: Laminar Separation, Izv. AN SSSR, Mekh. Zhid. i Gaza. 3 (1972), 47-59; Fluid Dyn. 7, 407-417, 1972

[55] A.E.P. Veldman: Boundary Layer Flow Past a Finite Flat Plate, Dissertation, Gronningen, 1976

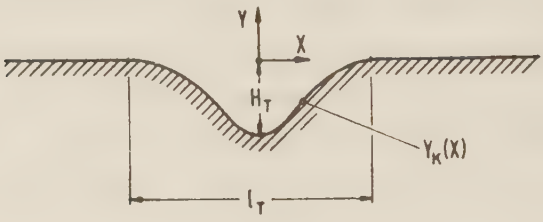
[56] A.E.P. Veldman: A Numerical Method for the Calculation of Laminar, Incompressible Boundary Layers with Strong Viscous-Inviscid Interaction, NLR TR 79023 U, 1979

[57] P.G. Williams: A Reverse Flow Computation in the Theory of Self-Induced Separation, Proc. 4th Int. Conf. on Num. Meth. Fl. Dyn., Lecture Notes in Physics 35, Springer Verlag, 445-451, 1975

[58] L.C. Woods: Two-Dimensional Flow of a Compressible Fluid past Given Curved Obstacles with Infinite Wakes, Proc. Roy. Soc. A, 227, 367-386, 1955

ANHANG

8. Numerische Ergebnisse



Zusammenhang mit physikalischen Größen:

$$x^* = Re^{-\frac{3}{8}} L^* \lambda^{-\frac{5}{4}} X$$

$$y_K^* = Re^{-\frac{5}{8}} L^* \lambda^{-\frac{3}{4}} Y_K$$

$$p^* - p_\infty = Re^{-\frac{1}{4}} \rho U_\infty^2 \lambda^{1/2} P$$

$$\tau_w^* = Re^{-\frac{1}{2}} \rho U_\infty^2 \lambda \left[\partial U/\partial Y\right]_K$$

Zahlenwerte für das Druckmaximum:

$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	P
0.1	0.5	0.081
0.25	0.5	0.185
0.5	0.5	0.321
0.6	0.5	0.354
0.7	0.5	0.378
1.0	0.5	0.409
1.5	0.5	0.429
0.25	2.0	0.043
0.5	2.0	0.077
1.0	2.0	0.125
1.6	2.0	0.158
0.868	1.255	0.185

BEISPIELRECHNUNG I :

$l_T = 2.0$ $H_T = 1.0$

X	Y_K	P	$\frac{\partial U}{\partial Y}\Big\|_K$
-1.978	0.0	-0.0288	1.0259
-1.788	0.0	-0.0321	1.0297
-1.613	0.0	-0.0357	1.0341
-1.450	0.0	-0.0395	1.0386
-1.299	0.0	-0.0434	1.0425
-1.160	0.0	-0.0474	1.0472
-1.030	0.0	-0.0518	1.0542
-0.911	-0.0004	-0.0565	1.0609
-0.800	-0.0091	-0.0586	1.0420
-0.697	-0.0440	-0.0513	0.9621
-0.602	-0.1177	-0.0295	0.8181
-0.512	-0.2309	0.0057	0.6427
-0.429	-0.3732	0.0486	0.4748
-0.350	-0.5285	0.0931	0.3393
-0.275	-0.6798	0.1354	0.2439
-0.204	-0.8121	0.1739	0.1851
-0.134	-0.9141	0.2085	0.1571
-0.067	-0.9782	0.2395	0.1562
0.0	-1.0000	0.2673	0.1825
0.067	-0.9782	0.2913	0.2398
0.134	-0.9141	0.3102	0.3349
0.204	-0.8121	0.3210	0.4736
0.275	-0.6798	0.3198	0.6577
0.350	-0.5285	0.3020	0.8777
0.429	-0.3732	0.2648	1.1032
0.512	-0.2309	0.2111	1.2887
0.602	-0.1177	0.1498	1.3922
0.697	-0.0440	0.0937	1.3985
0.800	-0.0091	0.0521	1.3338
0.911	-0.0004	0.0260	1.2516
1.030	0.0	0.0102	1.1909
1.160	0.0	-0.0005	1.1514
1.299	0.0	-0.0086	1.1218
1.450	0.0	-0.0146	1.0993
1.613	0.0	-0.0191	1.0813
1.788	0.0	-0.0225	1.0666
1.978	0.0	-0.0247	1.0538

BEISPIELRECHNUNG II:

$l_T = 2.0$ $H_T = 3.0$

X	Y_K	P	$\left.\frac{\partial U}{\partial Y}\right\|_K$
-1.9[illegible]	0.0	-0.0368	1.0352
-1.768	0.0	-0.0417	1.0423
-1.513	0.0	-0.0474	1.0508
-1.450	0.0	-0.0537	1.0593
-1.279	0.0	-0.0600	1.0645
-1.200	0.0	-0.0664	1.0723
-1.050	0.0	-0.0741	1.0883
-0.961	-0.0011	-0.0834	1.1078
-0.800	-0.0274	-0.0852	1.0479
-0.697	-0.1319	-0.0503	0.8107
-0.652	-0.3532	-0.0043	0.4518
-0.512	-0.6927	0.0629	0.1338
-0.429	-1.1196	0.1185	-0.0560
-0.350	-1.5356	0.1578	-0.1259
-0.275	-2.0393	0.1851	-0.1602
-0.204	-2.4363	0.2056	-0.1690
-0.134	-2.7423	0.2225	-0.1808
-0.067	-2.9345	0.2379	-0.1879
0.0	-3.0000	0.2534	-0.2102
0.067	-2.9345	0.2709	-0.2326
0.134	-2.7423	0.2925	-0.2706
0.204	-2.4363	0.3215	-0.2948
0.275	-2.0393	0.3514	-0.2755
0.350	-1.5356	0.4160	-0.0529
0.429	-1.1196	0.4286	0.4218
0.512	-0.6927	0.3900	1.0474
0.652	-0.3532	0.2865	1.5512
0.697	-0.1319	0.1515	1.7293
0.800	-0.0274	0.0561	1.6260
0.961	-0.0011	0.0145	1.4335
1.050	0.0	-0.0095	1.3009
1.200	0.0	-0.0225	1.2201
1.279	0.0	-0.0303	1.1570
1.450	0.0	-0.0348	1.1256
1.513	0.0	-0.0373	1.0994
1.768	0.0	-0.0384	1.0744
1.9[illegible]	0.0	-0.0381	1.0579

BEISPIELRECHNUNG III :

$l_T = 0.5$ $H_T = 0.8$

X	Y_K	P	$\left.\frac{\partial U}{\partial Y}\right\|_K$
-0.494	0.0	-0.0122	1.0190
-0.447	0.0	-0.0133	1.0207
-0.403	0.0	-0.0141	1.0226
-0.363	0.0	-0.0149	1.0244
-0.325	0.0	-0.0157	1.0260
-0.290	0.0	-0.0160	1.0279
-0.258	0.0	-0.0174	1.0304
-0.228	-0.0003	-0.0181	1.0303
-0.200	-0.0073	-0.0179	0.9968
-0.174	-0.0352	-0.0118	0.8887
-0.150	-0.0742	0.0003	0.7080
-0.128	-0.1347	0.0179	0.5006
-0.107	-0.2286	0.0370	0.3163
-0.088	-0.4228	0.0567	0.1797
-0.069	-0.5438	0.0738	0.0887
-0.051	-0.6497	0.0888	0.0346
-0.034	-0.7313	0.1024	0.0069
-0.017	-0.7325	0.1142	-0.0002
0.0	-0.8000	0.1255	0.0125
0.017	-0.7325	0.1362	0.0496
0.034	-0.7313	0.1460	0.1210
0.051	-0.6497	0.1541	0.2402
0.069	-0.5438	0.1584	0.4134
0.087	-0.4228	0.1565	0.6586
0.107	-0.2286	0.1458	0.9306
0.128	-0.1347	0.1259	1.1785
0.150	-0.0742	0.1003	1.3386
0.174	-0.0352	0.0754	1.3799
0.200	-0.0073	0.0552	1.3283
0.228	-0.0003	0.0427	1.2488
0.258	0.0	0.0345	1.1901
0.290	0.0	0.0283	1.1538
0.325	0.0	0.0234	1.1275
0.362	0.0	0.0192	1.1078
0.403	0.0	0.0157	1.0922
0.447	0.0	0.0126	1.0796
0.494	0.0	0.0099	1.0688

BEISPIELRECHNUNG IV:

$l_T = 2.0$ $H_T = 0.2$

X	Y_K	P	$\left.\frac{\partial U}{\partial Y}\right\|_K$
-1.978	0.0	-0.0062	1.0062
-1.788	0.0	-0.0071	1.0073
-1.613	0.0	-0.0080	1.0086
-1.450	0.0	-0.0090	1.0100
-1.299	0.0	-0.0101	1.0113
-1.160	0.0	-0.0114	1.0131
-1.030	0.0	-0.0127	1.0156
-0.911	-0.0001	-0.0142	1.0184
-0.800	-0.0018	-0.0159	1.0187
-0.697	-0.0088	-0.0149	1.0035
-0.602	-0.0235	-0.0114	0.9762
-0.512	-0.0462	-0.0046	0.9394
-0.429	-0.0746	0.0052	0.8985
-0.350	-0.1057	0.0172	0.8591
-0.275	-0.1360	0.0303	0.8272
-0.204	-0.1624	0.0433	0.8060
-0.134	-0.1828	0.0553	0.7968
-0.067	-0.1956	0.0657	0.8003
0.0	-0.2000	0.0738	0.8169
0.067	-0.1956	0.0791	0.8455
0.134	-0.1828	0.0810	0.8843
0.204	-0.1624	0.0794	0.9299
0.275	-0.1360	0.0741	0.9788
0.350	-0.1057	0.0653	1.0269
0.429	-0.0746	0.0539	1.0676
0.512	-0.0462	0.0401	1.0950
0.602	-0.0235	0.0269	1.1057
0.697	-0.0088	0.0159	1.0996
0.800	-0.0018	0.0071	1.0818
0.911	-0.0001	0.0019	1.0615
1.030	0.0	-0.0011	1.0461
1.160	0.0	-0.0031	1.0357
1.299	0.0	-0.0044	1.0277
1.450	0.0	-0.0052	1.0216
1.613	0.0	-0.0056	1.0167
1.788	0.0	-0.0058	1.0120
1.978	0.0	-0.0058	1.0069

Lebenslauf

Heinz Herwig	geboren am 23.7.1950 in Dresden
Eltern:	Gerhard Herwig, kaufmännischer Angestellter und seine Ehefrau Marga Herwig, geb. Körner
Schulen:	Volksschule: April 1957 - Juli 1959 in Hamburg August 1959 - April 1961 in Hagen Gymnasium: April 1961 - August 1965 Fichte-Gymnasium, Hagen August 1965 - Juni 1969 Theodor-Heuß-Gymnasium, Hagen Reifeprüfung: Juni 1969
Bundeswehr:	Wehrdienst bei einer Fernmeldeeinheit von Juli 1969 - September 1970
Studium:	Maschinenbau an der Ruhr-Universität Bochum von Oktober 1970 - August 1975 Diplomprüfung: August 1975
Tätigkeit:	September 1975 - März 1977 mdVb-Assistent April 1977 - ... wissenschaftlicher Assistent am Institut für Thermo- und Fluiddynamik der Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl: Prof. Dr.-Ing. K. Gersten

D. GRÄBNER

DISSERTATIONS U. OFFSETDRUCKEREI

Gotenstraße 3
8602 Altendorf bei Bamberg
Telefon: 09545/8791